

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE DE RECUPERAÇÃO 2 – 5 DE JANEIRO DE 2007

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

- (1) Considere a variedade-2, $S \subset \mathbb{R}^3$, definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 1, y > 0\},$$

e orientada com o campo de normais unitárias n , tal que $n_y > 0$.

- (3 val.) (a) Sabendo que a densidade de massa de S é dada por $\alpha(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{2-y^2}}$, calcule a massa total de S .

- (4 val.) (b) Seja $\omega = 2yz \, dx \wedge dy - 2y^2 \, dx \wedge dz + 2xy \, dy \wedge dz$. Calcule $\int_S \omega$, segundo a orientação dada.

- (2) Considere a variedade-2, $M \subset \mathbb{R}^3$, definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\},$$

e orientada com o campo de normais unitárias n tal que $n_y > 0$ nos pontos de M com coordenada $y > 0$.

Seja f o campo vectorial $f(x, y, z) = (-xz, -yz, z^2)$.

Calcule o fluxo $\int_M f \cdot n$:

- (4 val.) (a) Utilizando o teorema da divergência.

- (4 val.) (b) Utilizando o teorema de Stokes clássico.

- (2.5 val.) (3) Determine, justificando cuidadosamente, se a igualdade seguinte é ou não válida:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/k}}{\sqrt{t}} \, dt = \int_0^{+\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t/k}}{\sqrt{t}} \, dt.$$

- (2.5 val.) (4) Seja f um campo vectorial definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $g : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow U$ uma parametrização de uma vizinhança de coordenadas, A , de uma variedade- $(n-1)$. Seja ν o campo de normais unitárias em A compatível com g . Mostre que, na orientação definida por g ,

$$\int_A * \omega_f = \int_A f \cdot \nu.$$