

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE DE RECUPERAÇÃO 1 – 5 DE JANEIRO DE 2007

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

- (1) Considere a variedade-2, $S \subset \mathbb{R}^3$, dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1\}.$$

- (3 val.) (a) Determine a equação do espaço tangente a S no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
- (3 val.) (b) Determine o máximo e o mínimo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 4z$ em S . Justifique.
- (3 val.) (c) *Utilizando o teorema da função implícita*, e descrevendo S na vizinhança do ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ na forma $x = g(y, z)$, calcule $\nabla g(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

- (2) Considere a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

- (3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de W em termos de integrais iterados do tipo $\int(\int(\int dx)dy)dz$.
- (3 val.) (b) Calcule o volume de W .
- (2 val.) (3) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\det Df(p) \neq 0, \forall p \in U$. Mostre que $f(U)$ é um conjunto aberto.
- (3 val.) (4) Seja $q_1, q_2, q_3, \dots$, uma enumeração de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, seja $0 < \epsilon < 1$ e considere os conjuntos abertos $A_j =]q_j - \frac{\epsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\epsilon}{2^{j+1}}[$, para $j \in \mathbb{N}$. Seja $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Determine se o compacto $K = [0, 1] \setminus A$ é ou não mensurável à Jordan.