

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 2 – 16 DE DEZEMBRO DE 2006 – VERSÃO 4

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

- (1) Considere a variedade-2, $M \subset \mathbb{R}^3$, definida por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -1 + (y^2 + z^2), x < 0\},$$

e orientada com o campo de normais unitárias n , tal que $n_x < 0$. Considere ∂M orientado de forma compatível com n .

(3 val.)

- (a) Calcule a área de M .

(4 val.)

- (b) Seja $\eta = 3xzdy - 3xydz$.

Aplicando o teorema de Stokes, calcule $\oint_{\partial M} \eta$ segundo a orientação dada.

(4 val.)

- (c) Seja $\xi = -zdx \wedge dy + ydx \wedge dz + 2(x+1)dy \wedge dz$.

Aplicando o teorema de Stokes com M e ∂M , calcule $\int_M \xi$ segundo a orientação dada.

(4 val.)

- (2) Considere o campo vectorial

$$h(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + z^2}, y, \frac{z}{x^2 + z^2} \right).$$

Calcule o integral de linha de h ao longo da espiral elíptica parametrizada por $\beta(t) = (4 \cos t, t, 2 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, segundo a orientação compatível com β .

(2 val.)

- (3) Determine se a função $f(x, y, z) = \frac{|y| \cos(x^2 + z^2)}{(x^2 + z^2)^{3/4}} e^{-x^2 - y^2 - z^2}$ é integrável em $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo calcule um majorante para $\int_{\mathbb{R}^3} f$.

(3 val.)

- (4) Mostre que em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ existem formas-2 fechadas que não são exactas.