

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 2 – 16 DE DEZEMBRO DE 2006 – VERSÃO 3

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

- (1) Considere a variedade-2, $S \subset \mathbb{R}^3$, definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 - (x^2 + z^2), y > 0\},$$

e orientada com o campo de normais unitárias n , tal que $n_y > 0$. Considere ∂S orientado de forma compatível com n .

(3 val.)

- (a) Calcule a área de S .

(4 val.)

- (b) Seja $\xi = 2yzdx - 2xydz$.

Aplicando o teorema de Stokes, calcule $\oint_{\partial S} \xi$ segundo a orientação dada.

(4 val.)

- (c) Seja $\eta = 2zdx \wedge dy + 4(y+1)dx \wedge dz + 2xdy \wedge dz$.

Aplicando o teorema de Stokes com S e ∂S , calcule $\int_S \eta$ segundo a orientação dada.

(4 val.)

- (2) Considere o campo vectorial

$$f(x, y, z) = \left(x^2, \frac{-y}{y^2 + z^2}, \frac{-z}{y^2 + z^2} \right).$$

Calcule o integral de linha de f ao longo da espiral elíptica parametrizada por $\alpha(t) = (t, 2 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, segundo a orientação compatível com α .

(2 val.)

- (3) Determine se a função $g(x, y, z) = \frac{|x| \sin(y^2)}{(y^2 + z^2)^{3/4}} e^{-x^2 - y^2 - z^2}$ é integrável em $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo calcule um majorante para $\int_{\mathbb{R}^3} g$.

(3 val.)

- (4) Mostre que em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ existem formas-2 fechadas que não são exactas.