Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 28 DE OUTUBRO DE 2006 – VERSÃO 2

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

(1) Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2} - 3)^2 = 1\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que A é uma variedade. Determine a sua dimensão.

(2.5 val.) (b) Determine se o vector $(3, 2, -2)$ pertence ou não ao espaço tangente a A no ponto $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(2.5 val.) (c) Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange, determine o mínimo e o máximo da função $f(x, y, z) = y^2 + 10y$ em A. Justifique.

(2 val.) (d) Em que pontos podemos garantir que A é descrito localmente pelo gráfico de uma função de classe C^1, da forma $y = h(x, z)$?

(2) Considere a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

(3.5 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados do tipo $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) (b) Sabendo que V tem densidade de massa $\alpha(x, y, z) = |z|$, calcule a massa total de V.

(2 val.) (3) Recorde que um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ se diz *mensurável à Jordan* se a sua fronteira tem medida nula. Sejam S_j, $j \in \mathbb{N}$, conjuntos mensuráveis à Jordan disjuntos e tais que a sua união $S = \bigcup_{j=1}^{+\infty} S_j$ é ainda um conjunto limitado. Dê um contra-exemplo ou demonstre a seguinte afirmação: "S também é mensurável à Jordan".

(2.5 val.) (4) Seja $0 < k < n$. Seja $V \subset \mathbb{R}^k$ um aberto e $g : V \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização de $B = g(V)$. Mostre que $\forall p \in B$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e uma função de classe C^1, $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, tal que a característica de DF é máxima em U e que $B \cap U = F^{-1}(0)$.