Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II

2º Teste e 1º Exame - 4 de Janeiro de 2006 - 17h
Duração: Teste 1h30m, Exame: 3h
(Cursos: LEIC, LEC, LET, LENAV)

Resolução resumida

1. Calcule os integrais seguintes:

(1 val.) a) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

(1 val.) b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}}\,dx$

(1 val.) c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$

Resolução:

a) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x\,\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = 2\log 2 - \frac{3}{4}.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2e^{\sqrt{1+x}}\,\Big|_0^1 = 2(e^{\sqrt{2}} - e).$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \arctan e^x\,\Big|_1^2 = \arctan e^2 - \arctan e.$

(1 val.) 2. Seja

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^3 \le y \le x,\ x\ge 0\}.$$

Esboce A e calcule a respectiva área.

Resolução:

A é a região compreendida entre o gráfico de $y = x^3$ e o gráfico de $y = x$ com $0 \le x \le 1$. Logo,

$$area(A) = \int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{4}.$$

3. Seja $f(x) = \operatorname{sen}(x^2) - x^4$.

(1 val.) a) Escreva a série de Taylor de f em $x = 0$.

(1 val.) b) Determine a derivada $f^{(40)}(0)$.

Resolução:

a) Temos a série de Taylor,

$$f(x) = \text{sen}(x^2) - x^4 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} - x^4 = x^2 - x^4 + \frac{x^6}{3!} - \cdots$$

b) O coeficiente de x^{40} da série de Taylor será igual a $\frac{f^{(40)}(0)}{40!}$. Ora, $2(2k+1) = 4k+2 \neq 40, \forall k = 0, 1, 2, ...$ Logo, $f^{(40)}(0) = 0$.

(1.5 val.) 4. Calcule $\frac{1}{1.1}$ com um erro inferior a 10^{-3}.

Resolução:

Tem-se $\frac{1}{1.1} = f(-0.1)$ com

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

O módulo do erro de ordem n na fórmula de Taylor de f é dado por

$$|r_n(-0.1)| = \left|\frac{(-0.1-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(c)\right| \leq 10^{-(n+1)},$$

onde $c \in [-0.1, 0]$ e onde utlizámos $|f^{(j)}(c)| = |\frac{j!}{(1-c)^{j+1}}| \leq j!$. Para termos um erro inferior a 10^{-3} basta então tomarmos $n = 3$, obtendo

$$\frac{1}{1.1} = 1 - 0.1 + 0.01 - 0.001 + \cdots.$$

(1 val.) 5. Determine os pontos de estacionaridade de

$$g(x) = \int_0^{x^2} \cos(t^3)dt.$$

Resolução:

Sendo a integranda uma função contínua, pelo teorema fundamental do cálculo vamos ter

$$g'(x) = 2x\cos(x^6).$$

Os pontos de estacionaridade serão então dados por $g'(x) = x\cos(x^6) = 0$, ou seja, $x = 0$ ou $x = (\frac{\pi}{2} + k\pi)^{\frac{1}{6}}$, com $k = 0, 1, 2, ...$

(1.5 val.) 6. Utilizando a fórmula de Taylor calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^3)}{\text{sen}(x^2) - x^2}.$$

Resolução:

recorrendo à fórmula da Taylor,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^3)}{\text{sen}(x^2) - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-\frac{x^6}{2} + o(x^{12}))}{x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^{10}) - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3!}{2}\frac{x^6}{x^6} = -3.$$

VSFF

2º Teste

(1 val.) 7. Determine o gradiente de $f(x,y) = x^2 - y^3 + 12y$ e calcule a sua derivada segundo o vector $v = (4,2)$ no ponto $(x,y) = (1,1)$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,,\,\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (2,9) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(1,1) &= (2,9)\cdot(4,2) = 26 \end{aligned}$$

(1.5 val.) 8. Sejam $g(u,v) = (\frac{u^2}{2}, \frac{v^2}{2}, uv)$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ z & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Calcule $D(f \circ g)(-1,1)$.

Resolução:

$$D(f\circ g)(-1,1) = Df(g(-1,1))Dg(-1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

9. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície definida por $x - x^2 - y^2 - 1 - z = 0$.

(1 val.) a) Determine o plano tangente a S no ponto $(2,1,-4)$.

Resolução:

Seja $F(x,y,z) = x - x^2 - y^2 - 1 - z$. A direcção da normal a S no ponto $(2,1,-4)$ é dada pelo vector $\nabla F(2,1,-4) = (-3,-2,-1)$. Portanto, o plano tangente a S no ponto $(2,1,-4)$ será definido pela equação

$$(-3,-2,-1)\cdot(x-2, y-1, z+4) = 0,$$

ou seja,

$$3x + 2y + z = 4.$$

(1 val.) b) Determine o ponto de S em que o respectivo plano tangente é horizontal.

Resolução:

No ponto em que o plano tangente é horizontal a normal deverá ser vertical. Sendo a normal dada pelo gradiente da função $F(x, y, z) = x - x^2 - y^2 - 1 - z$, deveremos ter

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - 2x = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2y = 0,$$

ou seja, $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 0$ e $z = -\dfrac{3}{4}$.

10. Considere a função $g(x, y) = x^2 + y^2 - y^3$.

(1 val.) a) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de g na região $x^2 + y^2 < 1$.

Resolução:

Os pontos de estacionaridade são dados pelas condições

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x = 0$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y - 3y^2 = 0,$$

de onde obtemos

$$(0, 0)\,,\ (0, \frac{2}{3}).$$

Note-se que estes dois pontos estão na região considerada.
Para classificar os pontos de estacionaridade recorremos à matriz Hessiana

$$D^2 g(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 6y \end{bmatrix}$$

em cada um dos pontos.
Assim, teremos

$$D^2 g(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sendo $D^2 g(0, 0)$ uma matriz diagonal, os respectivos valores próprios são as entradas da diagonal principal e, portanto, o ponto $(0, 0)$ é um mínimo de g.
Para o ponto $(0, \frac{2}{3})$, teremos

$$D^2 g(0, \frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, será um ponto em sela.

(1 val.) b) Justifique que g tem extremos absolutos na região $x^2 + y^2 \leq 1$ e determine-os.

Resolução:

Sendo g uma função contínua e a região dada por $x^2 + y^2 \leq 1$ um conjunto compacto, pelo teorema de Weierstrass, haverá pontos de máximo e de mínimo de g nesta região.

No interior desta região os extremos de g estarão localizados nos pontos de estacionaridade determinados na alínea anterior, ou seja, o ponto $(0, 0)$ será um ponto de mínimo de g.

Na fronteira desta região os extremos de g serão determinados pelo método dos multiplicadores de Lagrange, ou seja, pelas equações

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 2y - 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Da primeira equação obtemos $x = 0$ ou $\lambda = -1$. Destas duas condições conclui-se imediatamente que os pontos a considerar serão

$$(0, -1)\,,\ (0, 1)\,,\ (-1, 0)\,,\ (1, 0).$$

Sendo $g(-1, 0) = b(1, 0) = 1$, $g(0, -1) = 2$ e $g(0, 0) = g(0, 1) = 0$, concluimos que $(0, -1)$ é o ponto de máximo e $(0, 0)$ e $(0, 1)$ são pontos de mínimo.

11. Considere a equação $x^2y^3 - 2xz^2 + y^4z = 0$.

(1 val.) a) Justifique que a equação determina z como função de (x, y), ou seja $z = f(x, y)$, numa vizinhança de $(1, 1, 1)$.

Resolução:

Seja $F(x, y, z) = x^2y^3 - 2xz^2 + y^4z$. Esta função é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $F(1, 1, 1) = 0$. Sendo $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 1) = -3 \neq 0$, pelo teorema da função implícita concluímos que existe uma vizinhança de $(1, 1, 1)$ em que o conjunto dado por $F(x, y, z) = 0$ é o gráfico de uma função f, de classe C^1, tal que se tem $z = f(x, y)$.

(1 val.) b) Calcule $\nabla f(1, 1)$.

Resolução:

Dado que numa vizinhança de $(1, 1, 1)$ temos $z = f(x, y)$, da equação $F(x, y, f(x, y)) = 0$, obtemos

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) + \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) + \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0, \end{gathered}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = \frac{7}{3}$$

e, portanto,

$$\nabla f(1,1) = (0, \frac{7}{3}).$$

(1.5 val.) 12. Sejam A e B duas superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$. Seja $d > 0$ a distância mínima entre A e B, e sejam $p \in A, q \in B$ tais que $||p - q|| = d$. Mostre que o plano tangente a A em p é paralelo ao plano tangente a B em q.

Resolução:

Seja $f(x) = ||x - q||^2$ a função que mede o quadrado da distância de $x \in \mathbb{R}^3$ a $q \in B$. Por definição de p e q, a função f, restringida à superfície A, terá um mínimo em $x = p$. Assim, o ponto p será um extremo condicionado de f em A, ou seja, será solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla F(x) \\ F(x) = 0 \end{cases}$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$ e F é uma função de classe C^1 que descreve, localmente em torno do ponto p, a superfície A.

Sendo $\nabla F(p)$ um vector normal à superfície A em p, a primeira equação diz-nos que o vector $\nabla f(p)$ é também normal a A em p.

Notando que $\nabla f(p) = 2(p - q)$, concluímos que o vector $p - q$ é normal a A em p. Do mesmo modo, se conclui que o vector $p - q$ é normal a B em q.

Dado que o plano tangente num ponto é perpendicular ao vector normal nesse ponto, é claro que o plano tangente a A em p é paralelo ao plano tangente a B em q.