TÉCNICO LISBOA

ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEGM, MEC, MEBiol, MEBiom

1.º Sem. 2019/20 28/1/2020 Duração: 1h30m+1h30m Versão B

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1º TESTE

(3,0 val.) **1.** Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \, x(|x+3|-4) > 0\}\,, \qquad B = [-7, +\infty[\setminus A\,, \qquad C = B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\,.$$

a) Determine A na forma de intervalo ou união de intervalos e mostre que $B = [0,1] \cup \{-7\}$.

b) Indique, ou justifique que não existem em $\mathbb{R}$, o ínfimo e o mínimo de B e de C.

c) Considere, ainda, h uma função contínua em $\mathbb{R}$. Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Existe máximo em $\mathbb{R}$ do conjunto $h(B)$.

(ii) Se (x_n) é uma sucessão monótona de termos em B, a sucessão $(h(x_n))$ é convergente.

(2,0 val.) **2.** Prove por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{2n}.$$

(6,5 val.) **3.** a) Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{(i)}\ \frac{(-1)^n\, n^2 \sqrt{n}}{(n+2)\sqrt{4n^3+1}}\,, \qquad \text{(ii)}\ n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right) \operatorname{sen} n\,, \qquad \text{(iii)}\ \frac{n4^n + \ln(n)}{n^2 3^n + n^4}.$$

b) Calcule o seguinte limite em $\overline{\mathbb{R}}$, caso exista:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + 3e^{-\sqrt{x}}\right)^{e^{\sqrt{x}+1}}.$$

(6,5 val.) **4.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \beta \operatorname{arctg}(x^2 + 2x), & \text{se } x \leqslant 0, \\ x\, e^{-x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

onde β é uma constante real.

a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é uma função contínua.

c) Sendo $f_e'(0) = 2\beta$, determine β por forma a que f seja diferenciável em $x = 0$. Justifique então que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule a função derivada.

d) Determine os extremos locais e os intervalos de monotonia de f (com $\beta = 1/2$).

e) Indique, justificando, o contradomínio de f (com $\beta = 1/2$).

(2,0 val.) **5.** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]-\infty, a[$, e tal que $\lim\limits_{x \to a^-} g(x) = +\infty$. Mostre que g' não é majorada em nenhuma vizinhança de a.

2º TESTE

(6,5 val.) **6.** a) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{(i)}\,\frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-\cos x)^5}\,, \qquad \text{(ii)}\ x^3\arccos(x^4)\,, \qquad \text{(iii)}\ \frac{2x-3}{(x+1)(x^2-2x+2)}\,.$$

b) Calcule o integral seguinte (pode ser útil fazer a substituição $t=\sqrt{2x-1}$):

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{2x-1}}{x}dx.$$

(2,5 val.) **7.** Considere a região R de $\mathbb{R}^2$ definida pelas condições:

$$y\leqslant x^3, \quad y\geqslant -x, \quad y\geqslant x(x-2), \quad x\leqslant 2\,.$$

Esboce a região R e calcule a sua área.

(3,0 val.) **8.** Considere a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$F(x)=\int_0^{x/3} e^{1-\cos(3t)}\,dt\,.$$

a) Determine o polinómio de Taylor p_2 de ordem 2 de F no ponto 0.

b) Use a fórmula do erro de Lagrange para mostrar que $|F(0{,}1)-p_2(0{,}1)|<10^{-3}$.

(3,0 val.) **9.** Determine a natureza de cada uma das séries seguintes (simplesmente convergente, absolutamente convergente ou divergente):

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^3}{3n^4\sqrt{n+2}}\,, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{n^3}.$$

(3,0 val) **10.** Considere a função g definida pela série de potências:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(x+9)^{2n}}{9^{n-1}\,(n+1)}.$$

a) Determine para que valores de x a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente.

b) Justifique que g tem um extremo local em -9, classificando-o.

(2,0 val.) **11.** Seja $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função monótona e seja $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ uma partição do intervalo $[a,b]$. Mostre que a diferença entre as somas superior e inferior relativas a esta partição é majorada por

$$\big|\,f(b)-f(a)\,\big|\max_{i=1,\dots,n}(x_i-x_{i-1}).$$