ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LEGM, MEC, MEM, MEAmbi, MEQ

1.º Sem. 2018/19 29/1/2019 Duração: 1h30m+1h30m Versão A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1º TESTE

(3,0 val.) **1.** Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x^2 + e^2 - 2) > 2\}$ e $C = A \cap B$.

a) Mostre que $C = \left[-2, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, 4\right]$. Indique, ou justifique que não existem em $\mathbb{R}$, o supremo e o máximo de C, e o ínfimo e o mínimo de $C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

b) Se (x_n) é uma sucessão monótona tal que $x_n \in C$, para todo $n \in \mathbb{N}$, diga justificando se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

(i) x_n é convergente, (ii) $(-1)^n x_n$ é convergente.

(2,0 val.) **2.** Prove por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{3^k} = 1 - \frac{n+1}{3^n}.$$

(3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \quad u_n = \left(\frac{\operatorname{sen}(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}\right)^n, \qquad \text{b)} \quad v_n = \frac{(-n)^n}{(n+1)! + 4^n}.$$

(3,0 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites em $\overline{\mathbb{R}}$, caso exista:

$$\text{a)} \lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}, \qquad \text{b)} \lim_{x \to 0} \left(\ln(1+2x)\right)^{3x}.$$

(7,0 val.) **5.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\, e^{x-1}, & x \leqslant 1 \\ 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right), & x > 1 \end{cases}$$

a) Determine a derivada de f para $x \neq 1$.

b) Justifique que f é contínua mas não diferenciável em $x = 1$.

c) Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

d) Mostre que f tem máximo e mínimo absolutos e determine, justificando, o contradomínio de f.

e) Estude f quanto à concavidade e esboce o seu gráfico.

(2,0 val.) **6.** Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável tal que $g(a) = g(b)$ e $g''(x) < 0$ para $x \in [a,b]$.

a) Mostre que função tem um único extremo em $]a,b[$.

b) Designando $g(c)$ esse extremo, mostre que se k é um número real compreendido entre $g(c)$ e $g(a)$ então a equação $g(x) = k$ tem exactamente duas raízes em $]a,b[$.

2º TESTE

(3,0 val.) **7.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{\cosh(2\ln x)}{x}, \qquad \text{b)}\ \frac{2x}{(x-2)(x^2-4)}.$$

(3,0 val.) **8.** Calcule os integrais seguintes (em b) pode ser útil fazer a substituição $t=\sqrt{3-x}$):

$$\text{a)}\ \int_{-1}^{1}(x+1)^2\,e^{1-x}dx, \qquad \text{b)}\ \int_{-2}^{2}\frac{1}{(4-x)\sqrt{3-x}}dx.$$

(2,5 val.) **9.** Considere a região R do plano dada por

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\geqslant 0,\quad y\leqslant\cos x,\quad y\geqslant \operatorname{sen} x,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Esboce a região R e calcule a sua área.

(3,5 val.) **10.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função e tal que $f(5)=0$, $f'(5)=3$. Considere ainda a função g dada, para cada $x\in\mathbb{R}$ para o qual o integral existe, por

$$g(x)=\int_5^x e^{x-t}f(t)\,dt\,.$$

a) Indique, justificando, qual é o domínio de g e mostre que a seguinte identidade é válida para todo x nesse domínio:

$$g''(x)-g(x)=f(x)+f'(x)\,.$$

b) Escreva o polinómio de Taylor de g de ordem 2 em torno do ponto 5 .

c) Indique, justificando, se g tem extremo local em 5 e, em caso afirmativo, classifique-o.

(3,0 val.) **11.** Determine a natureza de cada uma das séries seguintes (simplesmente convergente, absolutamente convergente ou divergente):

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n+\sqrt{n-1}}{1+\sqrt[3]{n^5-1}},, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{n!\,3^n}.$$

(3,0 val) **12.** Considere a função f definida pela série de potências:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(x+1)^n}{3^n\sqrt{n+1}}.$$

a) Verifique que a série é simplesmente convergente para $x=2$.

b) Indique o raio de convergência da série e os valores de x tais que a série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente (Sug. use a alinea anterior.)

c) Indique $f^{(80)}(-1)$.

(2,0 val.) **13.** Seja $\lambda>0$ e $f\in C^1([a,b])$. Use integração por partes e as propriedades do integral para mostrar que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)dt=0$.