ÉPOCA DE RECURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEGM, MEC, MEMat, MEQ

1.º Sem. 2017/18 29/1/2018 Duração: 1h30m+1h30m Versão A

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1º TESTE

(3,5 val.) **1.** Considere o conjunto

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x - 5| < x^2 + 5 \right\}$$

a) Mostre que $A =]-\infty, -1[\cup]0, 5[$.

b) Determine o conjunto dos majorantes e, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto A.

c) Decida, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

i. Qualquer sucessão crescente de termos em A converge em $\mathbb{R}$.

ii. Se (x_n) é uma sucessão em A decrescente de termos negativos então $\lim x_n = -\infty$.

iii. Se (x_n) é uma sucessão de termos em A tal que $(-1)^n x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ então (x_n) é divergente.

(2,0 val.) **2.** Prove por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)! \geqslant 2 \cdot 3^{n-1}.$$

(3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \quad u_n = \left((-1)^n \sqrt{2} + 1\right)^n, \qquad \text{b)} \quad v_n = \frac{n^2 n! + 2^n}{\operatorname{sen} n + (n+2)!} .$$

(3,0 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites em $\overline{\mathbb{R}}$, caso exista:

$$\text{a)} \lim_{x \to 2} \frac{1 - e^{x^2 - 3x + 2}}{4 - x^2}, \qquad \text{b)} \lim_{x \to 1/2} \left(\frac{6}{\pi} \operatorname{arcsen} x \right)^{\frac{1}{x - 1/2}} .$$

(6,5 val.) **5.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em 0, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(1+x), & x \geqslant 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2x}\right) + K, & x < 0 \end{cases}$$

com $K \in \mathbb{R}$.

a) Determine K.

b) Determine a derivada de f e justifique que f não é diferenciável em 0.

c) Mostre que f é estritamente monótona em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

e) Justifique que f é invertível em $]0, +\infty[$ e, sendo g a respectiva função inversa, mostre que $g(\ln 2) = 1$ e calcule $g'(\ln 2)$.

(2,0 val.) **6.** Seja $C \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que, dados $x, y \in C$, se $x \neq y$ então $|x - y| > 1$. Mostre que se (u_n) é uma sucessão de termos em C com limite $\ell \in C$ então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $u_n = \ell$ para qualquer $n > p$.

$2^{\underline{o}}$ TESTE

(3,0 val.) **7.** Seja $F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ tal que $F'(x)=1-x\,e^{x^2-1}+\dfrac{2}{x}\ln x$ e $F(1)=1$.

a) Determine F.

b) Indique o polinómio de Taylor de ordem 2 de F no ponto 1 e mostre que F tem um extremo em 1, classificando-o.

(2,0 val.) **8.** Determine uma primitiva da seguinte função racional:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,.$$

(3,0 val.) **9.** Considere os seguintes integrais:

$$\int_0^{\pi} 2t\cos t\,\mathrm{d}t\,, \qquad \int_{-2}^{\pi^2-2}\cos(\sqrt{x+2}\,)\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Mostre que são iguais, usando uma substituição de variável adequada.

b) Calcule o seu valor.

(2,5 val.) **10.** Considere a região R do plano dada por

$$R=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y<x^2-3,\quad y<5-x^2,\quad y>-4,\quad x>0\big\}$$

Esboce a região R e calcule a sua área.

(2,0 val.) **11.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua e $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$G(x)=\int_{e^{2-x}}^{e^{2x-4}} f(2t)\,\mathrm{d}t.$$

Mostre que $G'(2)=3f(2)$.

(3,0 val.) **12.** Determine a natureza de cada uma das séries seguintes e calcule a soma de uma delas:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{4^n\sqrt{n+1}}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\right).$$

(2,5 val.) **13.** Determine os valores de $x\in\mathbb{R}$ para os quais a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^4+\ln n}.$$

(2,0 val.) **14.** Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo limitado, $a\in\mathbb{R}$ e $\Phi(x)=\displaystyle\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$. Justifique que para cada $c\in\mathbb{R}$, Φ é integrável em $[c,c+1]$ e existe $b\in\mathbb{R}$ tal que

$$\int_c^{c+1}\Phi(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t.$$