Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 7 de Junho de 2019

LEGM, LEIC-A, LMAC, MEBiom, MEC, MEFT

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x+\cos x}}$, b) $x^{-6}\ln(1+x^{10})$

(4,0) **II.** a) Calcule uma função $\varphi:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$ que satisfaça, para todo $t\neq 2$,

$$\varphi'(t)=\frac{t^2-4t}{(t-2)^3}\,.$$

b) Calcule o integral

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}-4}{(\sqrt{x-1}-2)^3}\,dx$$

(Sugestão: pode ser-lhe útil o resultado da alínea anterior)

(2,0) **III.** Calcule a área da região do plano definida pelas seguintes condições:

$$y\geqslant 1\,,\qquad y\geqslant 2-\sqrt{x}\,,\qquad y\leqslant 2-\frac{x^2}{4}\,.$$

(3,5) **IV.** Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável positiva tal que $g(0)=1$, e seja f a função definida, para cada $x\in\mathbb{R}$, por

$$f(x)=\int_0^{x-1}(x-1-t)g(t)\,dt\,.$$

a) Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem de f em torno do ponto $a=1$.

b) Mostre que f tem um extremo local em $x=1$. Classifique-o e mostre que ele é, de facto, um extremo global.

(5,0) **V.** a) Classifique cada uma das seguintes séries como absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente e calcule a soma de uma delas:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$, ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arccos\frac{1}{n^2}$, iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

b) Diga para que valores de x a seguinte série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(3-x)^n}{2^n(\sqrt{n}-1)}\,.$$

(2,5) **VI.** Seja $a>0$, f uma função contínua em $\mathbb{R}$, e $\phi:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Prove que, se existe $M>0$ tal que, para todo $x\geqslant a^2$, $\phi(x)\leq M$, então

$$\int_{a^2}^{x}\frac{f(\sqrt{t})}{t}\,dt\leqslant\frac{2M}{a}\,.$$

(Sugestão: use primitivação por partes)