TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 7 de Janeiro de 2019

MEAmb, MEMat, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{x}{1+x^4}$, b) $x^3 \log x$. c) $\dfrac{4x^2-3x}{(x^2+1)(x-2)}$.

(2,0) **II.** Calcule o integral seguinte usando a substituição de variável indicada:

$$\int_0^1 \frac{4\sqrt{x}-3}{2(x+1)(\sqrt{x}-2)}\,dx\,, \qquad t=\sqrt{x}\,.$$

(Sugestão: poderá ser-lhe útil considerar uma das primitivas do grupo anterior)

(2,5) **III.** Calcule a área da região plana limitada pela parábola $y = x^2+1$ e pelas semi-rectas $y = 2|x|$.

(4,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_0^{x/2} (e^{4t^2}-1)\,dt\,.$$

a) Calcule o polinómio de Taylor de f de ordem 3 no ponto 0. Decida se f tem extremo local em $x = 0$.

b) Mostre que

$$\forall x \in [0, 10^{-1}], \qquad 0 \leqslant f(x) - \frac{x^3}{6} \leqslant 10^{-4}.$$

(4,5) **V.** a) Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^n (2\pi)^{-n}$, ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{arcsen} \frac{n}{n+2}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+5}$.

Calcule a soma de uma destas séries.

b) Determine o maior intervalo aberto I tal que a seguinte série de potências é convergente, para qualquer $x \in I$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)(-5)^n}\,.$$

(2,0) **VI.** Seja $f \in C(\mathbb{R})$ uma função periódica de período $T > 0$ (i.e., $f(x+T) = f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$). Mostre que a função

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$$

é periódica de período T se e só se $\int_0^T f(t)dt = 0$.