Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B)   10 de Novembro de 2018

MEAmb, MEMat, MEQ

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq \frac{2x+1}{3}\right\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 2\,|x-1|\}, \qquad C = (A \cup B) \cap \left[-\pi, \frac{2}{3}\right].$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cup B = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \cup [1, +\infty[\,.$$

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C e de $C \setminus \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão estritamente decrescente de termos em C tem limite $-\pi$.

(ii) Se (u_n) é uma sucessão de termos em C então $\lim \frac{u_n}{n} = 0$.

(iii) Qualquer função definida e contínua em C tem mínimo.

(3,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} b_1 = \frac{5}{2}, \\ b_{n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{b_n}\right) \quad , \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que os termos da sucessão verificam $2 < b_n < 3$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (b_n) é uma sucessão decrescente.

c) Justifique que (b_n) é convergente e calcule o limite.

(3,5) **III.** a) Calcule, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \;\; \frac{(-1)^n n^4 + n!}{3n! + 6^n}\,, \qquad \text{b)} \;\; \frac{(2n)^n}{4^n n!}\,.$$

b) Calcule o seguinte limite, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(1 - \operatorname{sen}(\pi x)\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(2x-1), & \text{se } x < 0, \\ -\frac{\pi}{4} e^{-x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.

c) Será g prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$? Justifique.

d) Determine o domínio de diferenciabilidade de g e calcule a função derivada. Use o resultado para justificar que g é uma função crescente.

e) Indique o contradomínio de g.

(2,5) **V.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e diferenciável com derivada f' limitada em $\mathbb{R}$. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$. Prove que a função g tem máximo global.
(Sugestão: começe por estudar os limites de g em $+\infty$ e $-\infty$)