Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 13 de Abril de 2019

LEGM, LEIC-A, LMAC, MEBiom, MEC, MEFT

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) **I.** Considere os conjuntos A, B e C seguintes:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ln|2x+e| > 1\}, \qquad B = \text{domínio de } \arccos(x^2-1), \qquad C = A \cap B.$$

a) Escreva os conjuntos A e B como intervalos ou união de intervalos e mostre que $C = \left]0, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de C, $C \setminus \mathbb{Q}$ e $(\mathbb{R}^+ \setminus C) \cap \mathbb{Q}$. Justifique os casos de não existência.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em C tem limite $\sqrt{2}$.

(ii) Existe uma sucessão convergente (u_n) de termos em $\mathbb{R} \setminus C$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n u_{n+1} < 0$.

(3,0) **II.** Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{5} \quad , \quad \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Use indução matemática para mostrar que os termos da sucessão verificam $u_n \leqslant 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Justifique que (u_n) é convergente e calcule o limite.

(4,0) **III.** Calcule, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$, ou caso contrário justifique a não existência do limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a) } \frac{(n+1)!+2^n(n+1)}{nn!+n^5}, \qquad \text{b) } \frac{(1+\cos(n^2+\sqrt{n}))^2}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{c) } \frac{(-5)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{9^n n+1}}.$$

$$\text{d) } \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Sugestão: para o último limite comece por calcular $\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^x$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2+x^2}\right), & \text{se } x < 0, \\ 4 + \dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{x}{2}\right), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Verifique se f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$.

c) Determine o domínio de diferenciabilidade de f, calcule a função f' e use-a para determinar os intervalos de monotonia de f.

d) Indique o contradomínio de f.

(3,0) **V.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

a) Seja $c : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ a função dada por $c(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} : n < x\}$. Mostre que para cada real x existe $\alpha \in \left]c(x), x\right[$ tal que

$$|f(x) - f(c(x))| \leqslant |f'(\alpha)|.$$

b) Admita agora que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 1$, e além disso $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Mostre que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e determine o seu valor.