Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão A) 3 de Julho de 2019

LEIC-A, LEGM, LMAC, MEBiom, MEC, MEFT.

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1º Teste

(4,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \frac{x^2 - 25}{|3 - x|} \leqslant 0 \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(\frac{x}{3}) > 0 \right\}.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$A \cap B =]3, 5] \ .$$

b) Determine, ou mostre que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de $(A \cap B) \setminus \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Existe uma sucessão de termos em $A \cap B$ divergente (em $\overline{\mathbb{R}}$).

(ii) Se (a_n) é uma sucessão crescente, de termos em $A \cap B$, então $\lim a_n = 5$.

(2,5) **II.** Considere a sucessão (a_n) definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_n = \dfrac{5a_{n-1}}{n} \quad , \quad \text{se } n \geqslant 2 \ . \end{cases}$$

Por indução, mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{5^{n-1}}{n!}$.

(5,0) **III.** Determine, ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$), os limites das seguintes sucessões :

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{n! + 6}$, b) $v_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{\operatorname{sen}(1/n\pi) + 3}$, c) $z_n = \dfrac{e^{4n} + n^2}{4^n + n^3}$,

d) $w_n = \left(\dfrac{6}{\pi} \operatorname{arctg}(n^5 + \sqrt{n}) - 2 \right)^{\left(3 - \frac{6}{\pi} \operatorname{arctg}(n^5 + \sqrt{n})\right)^{-1}}$.

Sugestão: na resolução da alínea d) comece por calcular $\lim\limits_{x \to 3} (x - 2)^{(3-x)^{-1}}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2x}}{2x + 1}, & \text{se } x > 0, \\ 2 + \log(1 - 2x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Justifique que f é contínua. Será f prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$? Justifique.

b) Calcule, em $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

c) Justifique que f é diferenciável e calcule a derivada $f'(x)$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Use o resultado para determinar os intervalos de monotonia de f.

d) Determine o contradomínio de f .

(2,5) **V.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e T-periódica para algum $T > 0$, isto é, $\forall_{x \in \mathbb{R}}, \ f(x + T) = f(x)$. Seja $\varphi :]0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua, não majorada e de classe C^1 em $]0, 1[$. Considere $g = f \circ \varphi$.

a) Suponha que $a, b \in]0, 1]$ são tais que $g(a) < g(b)$. Para $c = a$ e $c = b$ considere o conjunto $X_c = \{x \in]0, 1] : g(x) = g(c)\}$. Mostre que existem sucessões $(x_n), (z_n)$ em X_a e (y_n) em X_b, tais que, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$0 < z_n < y_n < x_n < \frac{1}{n} .$$

Sugestão: comece por provar que se $c \in g(]0, 1])$, então, para qualquer $k > 0$, $X_c \cap]0, k[\neq \emptyset$.

b) Mostre que, se $0 < \varepsilon < 1$, então, $g' ( ]0, \varepsilon[ ) = \mathbb{R}$.

2º Teste

(3,0) **VI.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{3}{x^2+9}\,, \qquad\qquad \text{b)}\ \frac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,.$$

(2,0) **VII.** Calcule a área da região plana limitada pelas linhas de equação

$$y = e^{2x}\,, \qquad y = 1 - x\,, \qquad x = 2.$$

(2,5) **VIII.** Calcule o integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}\,dx\,.$$

(3,0) **IX.** Determine o valor da constante $c \in \mathbb{R}$, por forma a que $f'(0) = 0$, sendo

$$f(x) = \int_{2x}^{cx+5} e^{-t^2}\,dt\,.$$

(2,0) **X.** Seja $g(x)$ uma função de classe C^3 em $\mathbb{R}$, com polinómio de Taylor de ordem 2 centrado em $x = 0$ dado por $p(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{2}$, e, além disso, satisfazendo $\forall_{x\in[0,10^{-1}]}\ |g^{(n)}(x)| \leqslant 1$, para $n = 1, 2, 3$. Obtenha a estimativa,

$$\forall_{x\in[0,10^{-1}]}\,, \qquad \left|4\operatorname{sen} g(x) - 2 - \sqrt{3}x^2\right| \leqslant 4.10^{-3}\,.$$

Sugestão: comece por escrever o polinómio de Taylor de ordem 2 da função $f(x) = \operatorname{sen} g(x)$.

(5,0) **XI.** a) Determine a natureza de cada uma das seguintes séries (absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente) e calcule, sempre que possível, a sua soma:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+5}{3n+2}\right)^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-2n}\,, \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{2n}}\,.$$

b) Diga para que valores de x a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{3^n \operatorname{arctg}(2n)}\,.$$

(2,5) **XII.** Sejam $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = f(b) = 0$ e $\int_a^b f^2(x)\,dx = 1$. Determine, justificando, o valor de

$$\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx\,.$$