Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

MEMat, MEQ

1.º Sem. 2017/18 8/1/2018 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(4,0 val.) **1.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}\cos x + 1}{(e^{\operatorname{sen} x} + x)^3}$, (b) $x^4 \operatorname{arctg}(x^5)$

(a) $P\left(\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}\cos x + 1}{(e^{\operatorname{sen} x} + x)^3}\right) = -\dfrac{1}{2(e^{\operatorname{sen} x} + x)^2}$.

(b) Primitivando por partes:

$$\begin{aligned} P(x^4 \operatorname{arctg}(x^5)) &= \frac{x^5}{5}\operatorname{arctg}(x^5) - P\left(\frac{x^5}{5}\frac{5x^4}{1+x^{10}}\right) \\ &= \frac{x^5}{5}\operatorname{arctg}(x^5) - P\left(\frac{x^9}{1+x^{10}}\right) \\ &= \frac{x^5}{5}\operatorname{arctg}(x^5) - \frac{1}{10}\ln(1+x^{10}). \end{aligned}$$

(4,0 val.) **2.** (a) Calcule uma função $\varphi : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ que satisfaça, para todo $t \neq 0$,

$$\varphi'(t) = \frac{t+1}{(t^2+1)t}\,.$$

A função racional a primitivar pode ser decomposta da forma seguinte:

$$\varphi'(t) = \frac{t+1}{(t^2+1)t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2+1} + \frac{C2t}{t^2+1}\,.$$

Cálculo das constantes:

$$A(t^2+1) + Bt + C2t^2 = t+1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A + 2C = 0 \\ B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

donde resulta $A = B = 1$, $C = -\frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(t) = P\left(\frac{t+1}{(t^2+1)t}\right) &= P\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{2}\frac{2t}{t^2+1}\right) \\ &= \ln|t| + \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\,. \end{aligned}$$

(b) Usando uma substituição de variável adequada, calcule o seguinte integral:

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$$

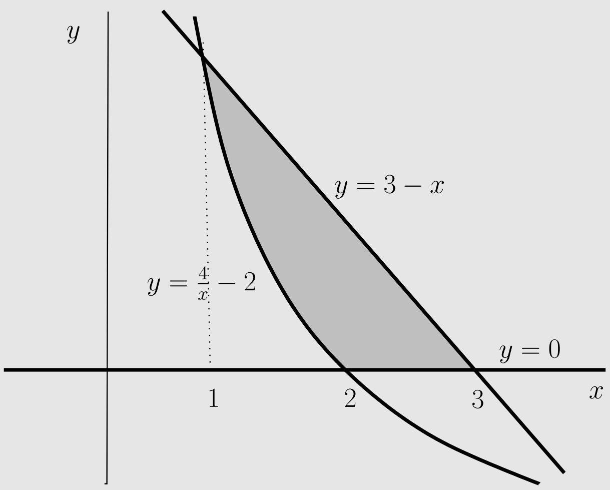
Sugestão: pode usar a alínea anterior.

A substituição de variável óbvia é $t = e^x$. Logo, $x = \ln t$ e, portanto, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$. Além disso, quando $x = 0$ tem-se $t = 1$, e, quando $x = \ln\sqrt{3}$, tem-se $t = \sqrt{3}$. Usando a fórmula de substituição e a alínea anterior temos então,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t+1}{t^2+1}\cdot\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t+1}{(t^2+1)t}dt \\
&= \Big[\ln|t| + \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big]_1^{\sqrt{3}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 4\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} + \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

(2,0 val.) **3.** Calcule a área do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado pelas condições $y \geqslant 0$, $y \leqslant 3-x$ e $y \geqslant \frac{4}{x} - 2$.

Esboço da região:



Cálculo dos pontos de intersecção:
$y = 0$ com $y = 3 - x$: $x = 3$;
$y = 0$ com $y = \frac{4}{x} - 2$: $x = 2$;
$y = 3 - x$ com $y = \frac{4}{x} - 2$:

$$3 - x = \frac{4}{x} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = 1,\, 4\,.$$

Neste caso, o ponto de intersecção relevante para a região em causa é a menor destas duas raizes, ou seja, $x = 1$. A àrea daquela região, A, será então dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left[(3 - x) - \left(\frac{4}{x} - 2 \right) \right] dx + \int_2^3 (3 - x)\, dx \\ &= \left[5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln |x| \right]_1^2 + \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_2^3 = 5 - \frac{3}{2} - 4 \ln 2 + 3 - \frac{5}{2} = 4 - 4 \ln 2\,. \end{aligned}$$

(3,5 val.) **4.** Seja f uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 1$, e g a função que, para cada $x \in \mathbb{R}$, é dada por

$$g(x) = \int_{2-x}^{x^2-5x+6} f(t)\, dt\,.$$

(a) Mostre que $x = 2$ é um ponto de estacionaridade de g.

Como f é de classe C^1, podemos aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo ao integral indefinido de f, o que, em conjunto com a regra de derivação da função composta, resulta

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 6)' - f(2 - x)(2 - x)' \\ &= f(x^2 - 5x + 6)(2x - 5) + f(2 - x)\,. \end{aligned}$$

Em $x = 2$, tem-se então,

$$g'(2) = -f(0) + f(0) = 0\,,$$

ou seja, 2 é ponto de estacionaridade de g.

(b) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 de g em torno do ponto $x = 2$. Terá g um extremo local em $x = 2$? Em caso afirmativo, classifique-o.

Como f é de classe C^1,

$$\begin{aligned} g''(x) &= \big(f(x^2-5x+6)(2x-5)+f(2-x)\big)' \\ &= 2f(x^2-5x+6)+f'(x^2-5x+6)(2x-5)^2-f'(2-x)\,, \end{aligned}$$

e, em $x=2$,

$$g''(2) = 2f(0)+f'(0)-f'(0) = 2f(0) = 2\,.$$

Dado também que $g(2) = \int_0^0 f = 0$, e atendendo à alínea (a), $g'(2)=0$, o polinómio de Taylor de g de ordem 2 em torno de $a=2$ será então,

$$\begin{aligned} p_2(x) &= g(2)+g'(2)(x-2)+\frac{g''(2)}{2!}(x-2)^2 \\ &= (x-2)^2\,. \end{aligned}$$

Dado que g é de classe C^2, $g'(2)=0$ e $g''(2)\neq 0$, sendo, portanto, a primeira derivada não nula em $x=2$ de ordem par, conclui-se que g tem um extremo local em 2. Dado que $g''(2)=2>0$, conclui-se que a concavidade de g em 2 é virada para cima, e portanto o extremo relativo em 2 é um mínimo relativo.

(4,5 val.) **5.** a) Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente. Calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^3+2\ln n}\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2^{3n-1}}\,.$$

A primeira série é uma série de termos não negativos com termo geral $a_n = \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^3+2\ln n}$. Usemos o critério de comparação para compararmos essa série com a série de termo geral $b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{n^3} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Como, quando $n\to+\infty$,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^3+2\ln n}\cdot\frac{n^3}{\sqrt{n^3}} = \sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{2\ln n}{n^3}} \to 1\neq 0,+\infty\,,$$

concluimos que as séries $\sum^\infty a_n$ e $\sum^\infty b_n$ têm a mesma natureza. Como $\sum^\infty b_n = \sum^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série de Dirichlet convergente, concluimos que a série dada, $\sum^\infty a_n$, é convergente e, como coincide com a sua série dos módulos, é absolutamente convergente.

Relativamente à segunda série, como,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2^{3n-1}} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n}{8^n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

e a última série é uma série geométrica de razão de módulo inferior a 1, e, portanto, absolutamente convergente, deduz-se que a série dada é absolutamente convergente e a sua soma é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2^{3n-1}} = 2 \cdot \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}\,.$$

b) Determine os valores de x para os quais a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n(\sqrt{n}+3)}\,.$$

Comecemos por calcular o raio de convergência da série de potências, R. Uma vez que os coeficientes são $c_n = \frac{1}{2^n(\sqrt{n}+3)}$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, temos,

$$R = \lim \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim \frac{2^{n+1}(\sqrt{n+1}+3)}{2^n(\sqrt{n}+3)} = 2,$$

e, podemos concluir, desde já, que a série de potências dada é absolutamente convergente quando $|x| < 2$ e é divergente quando $|x| > 2$. Restam os pontos $|x| = 2$. Para $x = 2$ a série é $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+3}$, a qual é uma série de termos não negativos que comparamos com a série de Dirichlet divergente $\sum^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Como,

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}+3}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1 \neq 0, +\infty,$$

concluimos que a série de potências é divergente em $x = 2$.
Em $x = -2$, a série é $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+3}$, a qual é uma série alternada do tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+3}$. Dado que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$, a sucessão (a_n) é decrescente e $a_n \to 0$, por aplicação do critério de Leibnitz concluímos que a série é convergente. Como a série dos módulos coincide com a série em $x = 2$, a qual vimos ser divergente, concluimos que, em $x = -2$, a série de potências é simplesmente convergente.

(2,0 val.) **6.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e não negativa que satisfaz a seguinte propriedade: existem $0 < a < b < 1$ e um $\varepsilon > 0$ tais que, para qualquer $x \in\ ]a,b[$, se tem $f(x) \geqslant \varepsilon$. Mostre que o integral inferior de f satisfaz

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx > 0\,.$$

Comecemos por relembrar que o integral inferior é, por definição,

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup \sigma\,,$$

onde σ é o conjunto formado por todas as somas inferiores de f no intervalo $[0,1]$. Assim, para obter o resultado desejado, basta construirmos uma soma inferior $s_d \in \sigma$ tal que $s_d > 0$. Para isso, temos que escolher uma decomposição conveniente, d. Consideremos dois pontos x_1, x_2, tais que $a < x_1 < x_2 < b$. Então, para todo $x \in [x_1, x_2]$, $f(x) \geqslant \varepsilon$ e, portanto, $\inf f([x_1, x_2]) \geqslant \varepsilon$. Consideremos a soma inferior relativa a esta decomposição:

$$s_d = m_1(x_1 - a) + m_2(x_2 - x_1) + m_3(b - x_2)\,,$$

onde, $m_1 = \inf f([a, x_1])$, $m_2 = \inf f([x_1, x_2])$ e $m_3 = \inf f([x_2, b])$. Como a função f é não negativa, $m_1, m_3 \geqslant 0$. Por outro lado, d foi obtida de forma a que $m_2 \geqslant \varepsilon$. Concluimos então que,

$$s_d \geqslant 0 + \varepsilon(x_2 - x_1) + 0 > 0,$$

e o resultado fica provado.