Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

MEMat, MEQ

1.º Sem. 2017/18 8/1/2018 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(4,0 val.) **1.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{e^{\operatorname{sen} x}\cos x + 1}{(e^{\operatorname{sen} x}+x)^3}$, (b) $x^4 \operatorname{arctg}(x^5)$

(4,0 val.) **2.** (a) Calcule uma função $\varphi : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ que satisfaça, para todo $t \neq 0$,

$$\varphi'(t) = \frac{t+1}{(t^2+1)t}\,.$$

(b) Usando uma substituição de variável adequada, calcule o seguinte integral:

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$$

Sugestão: pode usar a alínea anterior.

(2,0 val.) **3.** Calcule a área do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado pelas condições $y \geqslant 0$, $y \leqslant 3-x$ e $y \geqslant \dfrac{4}{x}-2$.

(3,5 val.) **4.** Seja f uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 1$, e g a função que, para cada $x \in \mathbb{R}$, é dada por

$$g(x) = \int_{2-x}^{x^2-5x+6} f(t)\,dt\,.$$

(a) Mostre que $x = 2$ é um ponto de estacionaridade de g.

(b) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 de g em torno do ponto $x = 2$. Terá g um extremo local em $x = 2$? Em caso afirmativo, classifique-o.

(4,5 val.) **5.** a) Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente. Calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^3+2\ln n}\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2^{3n-1}}\,.$$

b) Determine os valores de x para os quais a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n(\sqrt{n}+3)}\,.$$

(2,0 val.) **6.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e não negativa que satisfaz a seguinte propriedade: existem $0 < a < b < 1$ e um $\varepsilon > 0$ tais que, para qualquer $x \in \,]a,b[$, se tem $f(x) \geqslant \varepsilon$. Mostre que o integral inferior de f satisfaz

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx > 0\,.$$