- $]1-\varepsilon,1[\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$: por exemplo, para $n>\frac{1}{\varepsilon}$, temos $1-\varepsilon<1-\frac{1}{n}<1$ e $1-\frac{1}{n}\in\mathbb{Q}$.

  logo $0=\inf A$ e $1=\sup A$.

2. $A=]0,1[\setminus\mathbb{Q}[=]0,1[\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$

   De forma semelhante, $0=\inf A$ e $1=\sup A$ (toma-se por exemplo $\frac{\sqrt{2}}{n}\in]0,\varepsilon[\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e $1-\frac{\sqrt{2}}{n}\in]1-\varepsilon,1[\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).

3. $\mathbb{Q}^+=\mathbb{R}^+\cap\mathbb{Q}$ não é majorado, tem $\inf=0$, não tem mínimo.

Reparem que segue em particular dos exemplos acima que $V_\varepsilon(0)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$, para todo o $\varepsilon>0$, logo qualquer vizinhança de zero tem *infinitos* números racionais

Por outro lado também $V_\varepsilon(0)\cap\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\neq\emptyset$, para todo o $\varepsilon>0$ (toma-se por ex. $\frac{\sqrt{2}}{m}$), logo qualquer vizinhança de zero tem *infinitos* números irracionais.

Esta propriedade é válida em qualquer intervalo real. Para ver isso, usamos a chamada Propriedade Arquimediana:

$$\text{Dados } \varepsilon>0 \text{ e } R>0, \text{ existe } n\in\mathbb{N} \text{ com } n\varepsilon>R.$$

(Ou seja: dada uma unidade de medida ε - 'pequena' - podemos cobrir distância R - 'grande', repetindo-a um numero n - suficentemente grande - de vezes.) De facto, como $\mathbb{N}$ não é majorado, existe $n\in\mathbb{N}$ com $n>\frac{R}{\varepsilon}$. Temos agora:

Proposição 1.14. *Dados $a,b\in\mathbb{R}$ com $a<b$:*

i) existem $\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ tal que $a<\dfrac{p}{q}<b$ ou seja, $\dfrac{p}{q}\in]a,b[$,

ii) existe $t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tal que $a<t<b$ ou seja, $t\in]a,b[$.

Demonstração. Seja $n\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n}<b-a$, donde $a<a+\dfrac{1}{n}<b$. Da propriedade Arquimediana, podemos tomar $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$k\,\frac{1}{n}>a>(k-1)\,\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ a<\frac{k}{n}<a+\frac{1}{n}<b$$

(já que $\frac{1}{n}<b-a$) e $\dfrac{k}{n}\in\mathbb{Q}$. Da mesma forma, pode tomar-se $m\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\sqrt{2}}{m}<b-a$ e $j\in\mathbb{N}$ tal que

$$j\,\frac{\sqrt{2}}{m}>a>(j-1)\,\frac{\sqrt{2}}{m}\ \Rightarrow\ a<\frac{j\sqrt{2}}{m}<a+\frac{\sqrt{2}}{m}<b$$

e $\dfrac{j\sqrt{2}}{m}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. □

Reparem que, variando o intervalo, pode concluir-se que: