Aula 5

Vimos supremos e ínfimos, e que

$$s = \sup A \Leftrightarrow s \text{ é majorante e } V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0,$$

$$a = \inf A \Leftrightarrow a \text{ é minorante e } V_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$

Axioma do Supremo: qualquer conjunto não vazio, majorado tem supremo em $\mathbb{R}$.

NOTA: Sejam $A \subset B$.

- Se B é majorado, então os majorantes de B são majorantes de A, logo temos sempre

  $$\sup A \leq \sup B,$$

  já que $\sup B$ é majorante de A (e $\sup A$ é o menor majorante de A).
- Se B é minorado, então os minorantes de B são minorantes de A, logo temos sempre

  $$\inf A \geq \inf B.$$

- Se A é não majorado / minorado, então B é não majorado / minorado.

Outros exemplos:

1. $\mathbb{N}$ não é majorado, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ não são majorados nem minorados.

   Se $\mathbb{N}$ fosse majorado teria máximo $\alpha \in \mathbb{N}$, o que é absurdo já que $\alpha < \alpha + 1 \in \mathbb{N}$.
2. $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$: $\inf A = \min A = 2$, não é majorado, já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n + 1$.

   Em geral: se $r > 0$, então $r^n \geq 1 + n(r-1)$ - desigualdade de Bernoulli, logo se $r > 1$, $\{r^n : n \in \mathbb{N}\}$ não é majorado.
3. $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$: é limitado, $\sup A = \max A = 1$. Vemos que $\inf A = 0$: é claro que 0 é minorante (e $0 \notin A$). Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ temos $V_\varepsilon(0) \cap A \neq \emptyset$ já que para $n > \frac{1}{\varepsilon}$, temos $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Veremos agora exemplos com subconjuntos de números racionais e de números irracionais. Em particular, queremos saber como estes subconjuntos se 'distribuem' na recta real.

Exemplos:

1. $A =]0, 1[\cap \mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N}, p < q\}$

   É majorado (por 1) e minorado (por 0), logo existe $\sup A \leq 1$ e $\inf A \geq 0$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ temos

   - $]0, \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$: por exemplo, para $n > \frac{1}{\varepsilon}$, temos $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ e $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$,