III. Axioma do Supremo (ou da Completude) Qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ majorado e não vazio tem supremo em $\mathbb{R}$.

Segue que também qualquer conjunto minorado e não vazio tem ínfimo (por ex., notando que $\inf A = -\sup(-A)$).

Aplicações:

1. A equação $x^2 = 2$ tem solução em $\mathbb{R}$: consideremos o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 < 2\}.$$

   Este conjunto é não vazio, por exemplo $1 \in A$, e majorado, por exemplo por 2 (se $x > 2$ então $x^2 > 4$ e $x \notin A$, ou seja, qualquer $x \in A \Rightarrow x \leq 2$). Conclui-se que tem supremo $\alpha \in \mathbb{R}$, e é claro que $1 \leq \alpha \leq 2$.

   Pode ver-se que neste caso $\alpha^2 = 2$: temos $\alpha^2 < 2 \vee \alpha^2 = 2 \vee \alpha^2 > 2$, procede-se por eliminação.

   - se $\alpha^2 < 2$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha + \varepsilon)^2 < 2$ (basta tomar $0 < \varepsilon < \frac{2-\alpha^2}{2+\alpha}$), o que é impossível dado que nesse caso $\alpha < \alpha + \varepsilon \in A$ e α não seria majorante.
   - se $\alpha^2 > 2$, então $(\alpha - \varepsilon)^2 > 2$ para qualquer $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \frac{\alpha^2-2}{2-\alpha}$ e temos $x^2 > 2$, para qualquer $x \in V_\varepsilon(\alpha)$, em particular $V_\varepsilon(\alpha) \cap A = \emptyset$, o que é de novo impossível por ser $\alpha = \sup A$.

   Logo $\alpha^2 = 2$, e $\sqrt{2} := \alpha = \sup A$. Tem-se também $-\sqrt{2} := \inf A$.

   Em particular, vemos que A não tem supremo (nem infimo) em $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{Q}$ não verifica o Axioma do Supremo.

2. $\pi = \sup\{$áreas de polígonos inscritos circuferência raio 1$\}$

   (e também $e = \sup\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} : n \in \mathbb{N}\right\}$ - veremos mais tarde).

3. Dizimas periódicas: por exemplo

$$0,3(3) = \sup\{0,3\,,\ 0,33\,,\ 0,333\,, \ldots\} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$