Cálculo Diferencial e Integral I

LEAmb, LEMat, LQ, MEB, MEEC, MEQ

2º exame - 21 de Janeiro de 2008

duração: 3:00

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4 vals.) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \geq |x-1|\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} \leq 1\right\}.$$

a) Mostre que $A \cap B = \{-1\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) Indique (caso existam em $\mathbb{R}$),

$$\inf B, \quad \max B, \quad \max(A \cap B), \quad \sup(A \cap B \cap \mathbb{R}^-), \quad \inf[(A \cap B) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})],$$

c) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

(i) Toda a sucessão estritamente decrescente de termos em $A \cap B$ tem limite positivo.

(ii) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem pelo menos um sublimite.

(iii) Toda a sucessão estritamente crescente de termos em $A \cap B$, converge para 1.

(1,5 vals.) **II.** 1. Calcule (caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$\lim \frac{n^3 2^n}{3^n - n^3}, \qquad \lim \left(\frac{1+2n}{n}\right)^n, \qquad \lim \frac{\operatorname{arctg} n!}{n}$$

(2,0 vals.) 2. Calcule (caso existam em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{x}\right)^x, \qquad \lim_{x \to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{\log(x-1)}{\log \log x}.$$

(4 vals.) **III.** Seja α uma constante real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} ex + x^2 & \text{se } x < 0 \\ xe^{(\alpha - x)} & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$$

a) Mostre que, qualquer que seja α, f é contínua em $x = 0$.

b) Calcule, se existirem em $\widetilde{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Calcule α por forma que f seja diferenciável no ponto zero. Para este valor de α determine a função f'.

d) Determine os intervalos de monotonia de f e os respectivos extremos locais, se os houver.

e) Diga, justificando, qual é o contradomínio de f.

(3,5 vals.) **IV.** 1. a) Indique uma primitiva de cada uma das seguintes funções

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}, \qquad \frac{3e^x}{1+e^{2x}}.$$

b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

(1.5 vals.) 2. Determine a única função $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ que verifica as condições seguintes:

$$\begin{cases} g'(x) = \log\left[(x+1)^2\right], & \forall x \neq -1, \\ g(0) = 1 \\ g(-2) = 0 \end{cases}$$

(1,5 vals.) 3. Seja g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que

$$g(1) = 0 \quad \text{e} \quad g'(1) = 1.$$

Considere a função f dada por

$$f(x) = \int_x^{x^2} g(t)\,dt.$$

a) Justifique que f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine f' e f''.

b) Justifique que $x = 1$ é um ponto de extremo local. Será ponto de máximo ou de mínimo local?

(2 vals.) **V.** Seja $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que,

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n.$$

a) Será f prolongável por continuidade ao ponto zero? Justifique.

b) Mostre que se, além das hipóteses atrás enunciadas, $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$ (f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ com derivada contínua) então,

$$f'(]0,1[) = \mathbb{R}.$$

(Sugestão: use o teorema de Lagrange.)