1. Se $x \in [0,1]$ e $n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\left|\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\right| < \frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

2. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n de e^x e de $\operatorname{sen} x$ em torno de $a \in \mathbb{R}$ e mostre que o resto $E_n(x)$ tende para zero, quando $n \to +\infty$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

3. (a) Calcule o polinómio de MacLaurin de ordem 6 de $\operatorname{sen} x$ e escreva uma estimativa para $E_6(x)$.

   (b) Use (a) para calcular um valor aproximado de $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, determinando uma estimativa para o erro dessa aproximação.

4. Seja I um intervalo aberto, $a \in I$, e $f : I \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Suponha ainda que

$$\forall x \in I \quad f''(x) > 0.$$

   Mostre que, em I, o gráfico da função f nunca está abaixo da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$.

5. Seja $f \in C^3(\mathbb{R})$ uma função par tal que f''' é monótona numa vizinhança de zero.

   (a) Prove que f' e f''' são ímpares e calcule $f'(0)$ e $f'''(0)$.

   (b) Prove que f tem em $x = 0$ um extremo local.

Soluções com algumas sugestões de resolução

1. Se $f(x) = \log(1+x)$, veja que $f^{(n)}(x) = (-1)^n(n-1)!(1+x)^{-n}$, para $n = 1, 2, 3, \dots$, e logo, $f^{(n)}(0) = (-1)^n(n-1)!$. Logo o polinómio de Taylor de ordem n em torno de $a = 0$ é

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

   Como $|f(x) - P_n(x)| = |E_n(x)|$, em que ao resto de ordem n, $E_n(x)$, se pode aplicar a fórmula do resto de Lagrange (veja as condições de aplicação...):

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \text{para algum } c \text{ entre } 0 \text{ e } x,$$

   temos

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{n!(1+c)^{-(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \\ &= \frac{|1+c|^{-(n+1)}}{n+1}|x|^{n+1} \le \frac{x^{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

   dado que $0 < c < x < 1$.

2. Para $f(x) = e^x$,

$$P_n(x) = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{e^a(x-a)^n}{n!},$$

   com o resto dado pela fórmula de Lagrange $E_n(x) = \frac{e^c(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$, para algum c entre a e x.

   Para $f(x) = \operatorname{sen} x$,

$$P_n(x) = \operatorname{sen} a + \cos a(x-a) - \frac{\operatorname{sen} a(x-a)^2}{2!} - \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!},$$

   com o resto dado pela fórmula de Lagrange $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}$, para algum c entre a e x.

   Fixe-se x. Nas fórmulas para $E_n(x)$, levando em conta que $e^c \le e^x$ e que, no caso do seno, $f^{(n+1)}(c) \in [-1, 1]$, usando os resultados já conhecidos sobre limites de sucessões obtem-se o resultado.

3. (a) $P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$. Usando a fórmula do resto de Lagrange: $|E_6(x)| \le \frac{|x|^7}{7!}$.

(b) De $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{E_6(x)}{x}$, obtem-se

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} + \int_0^1 \frac{E_6(x)}{x}\, dx.$$

Como $|\int_0^1 \frac{E_6(x)}{x}\, dx| \leq \int_0^1 \frac{x^6}{7!}\, dx = \frac{1}{7 \cdot 7!}$, obtemos um valor aproximado de $1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.95244\ldots$ com um erro de aproximação igual ou inferior a $\frac{1}{7 \cdot 7!} = 2.8 \cdots \times 10^{-5}$.

4. Recta tangente em $(a, f(a))$: $\varphi(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Fórmula de Taylor de ordem 1: $f(x) = \varphi(x) + E_1(x)$. Dado que f é duas vezes diferenciável no intervalo I podemos usar a fórmula do resto de Lagrange: $E_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - a)^2$, para algum c entre a e x. Como, para cada $x \in I$, $c \in I$ e, por hipótese, $f'' > 0$ em I, obtem-se $E_1(x) \geq 0$ para cada $x \in I$, donde se conclui o resultado desejado.

5. (a) Recordar: f é par sse $\forall_x\ f(x) = f(-x)$ e é ímpar sse $\forall_x\ f(x) = -f(-x)$. Pela aplicação do teorema da derivação da função composta duas vezes obtem-se o resultado de imediato para $f'(x)$ e $f''(x)$. No caso $x = 0$, $f'(0) = -f'(-0) = -f'(0)$ e, logo, $2f'(0) = 0$. Para $f'''(0)$ é idêntico. Então, $f'(0) = f'''(0) = 0$.

   (b) Sabemos que $f'(0) = 0$. No caso $f''(0) \neq 0$, sabemos que f tem extremo local em 0. Se $f''(0) = 0$, nada se pode concluir da informação dada por $f''(0)$. Mas, neste caso, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e a fórmula de Taylor de ordem 2 em torno de $a = 0$ é

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} + E_2(x) = f(0) + E_2(x)\ ,$$

   em que podemos usar a fórmula do resto de Lagrange $E_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$, para algum c entre 0 e x. Ora f''' é monótona numa vizinhaça $V_\varepsilon(0)$. Suponhamos que é crescente (estude o caso decrescente). Então, para todo $x \in\ ]-\varepsilon, 0[$, $f'''(x) \leq 0$ e, para todo $x \in\ ]0, \varepsilon[$, $f'''(x) \geq 0$. Logo, $\forall_{x \in V_\varepsilon(0)}\ E_2(x) \geq 0$, e, portanto, $f(x) \geq f(0)$, para x nessa vizinhança.