Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

(Todas as licenciaturas - 2ª fase)

Data: 1/3/2001
Duração: 3h00.

I.

Considere os conjuntos definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+1}{x-2} \geq x \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(2x^2 + x) \geq 0 \right\}$$

1. Identifique o conjunto A, e mostre que $B =]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

2. Determine, se existirem em $\mathbb{R}$:

$$\min A, \qquad \sup B \cap \mathbb{Q}, \qquad \inf A \cap B, \qquad \sup B \cap \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}, \qquad \max A \cap \mathbb{Q}^-.$$

3. a) Mostre que, se (x_n) é uma sucessão crescente em $A \cap B \cap \mathbb{R}^-$, então (x_n) é convergente.

   b) Mostre que, se (x_n) é uma sucessão em $B \cap \mathbb{R}^+$, então a sucessão (y_n) dada por $y_n = (-1)^n x_n$ é divergente.

   c) Dê um exemplo de uma sucessão (x_n) de irracionais em A que convirga para um elemento do complementar de A.

II.

1. Estude cada uma das seguintes séries numéricas quanto à convergência simples e absoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+3} \right)^{3n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n!} \right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n} \right).$$

   Calcule a soma de uma delas.

2. Determine o conjunto de pontos onde é convergente (simples ou absolutamente) a série de potências seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1}.$$

III.

1. Calcule os seguintes limites em $\tilde{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to -1^+} (1+x)^{1+x}.$$

2. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2-x}, & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan(1-x^2)\,, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Calcule, caso existam, os valores de:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

b) Diga, justificando, qual é o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

d) Determine, o contradomínio de f. Justifique detalhadamente a sua resposta.

IV.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável. Suponha que existe $a > 0$, tal que a equação

$$f(x) = x^3,$$

tem as três soluções $-a$, 0 e a.

a) Mostre que $a^2 \in f'(\mathbb{R})$.

b) Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f''(c) = 0$.