Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

(Todas as licenciaturas - 2ª fase)

Data: 17/2/2001
Duração: 3h00.

I.

Considere os conjuntos definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + x}{x + 2} \leq 1 \right\}, \qquad B = \arctan\left([1, +\infty[\right)$$

1. Identifique o conjunto B, e mostre que $A =]-\infty, -2[\cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
2. Determine, se existirem em $\mathbb{R}$:

$$\inf A, \qquad \max B, \qquad \sup A \cup B, \qquad \min A \cap B, \qquad \max(A \cap B \cap \mathbb{Q}).$$

3. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo.
   a) Toda a sucessão crescente de termos em B é convergente.
   b) Se (x_n) é uma sucessão monótona de termos em B, e f é uma função contínua em B então $(f(x_n))$ é uma sucessão convergente em $\mathbb{R}$.
   c) Se $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada então f tem máximo global.

II.

1. Estude cada uma das seguintes séries numéricas quanto à convergência simples e absoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^7)}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{2n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{1+n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}.$$

   Calcule a soma de uma delas.

2. Determine o conjunto de pontos onde é convergente (simples ou absolutamente) a série de potências seguinte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + 2^n}.$$

III.

1. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, que $f(0) = 0$ e que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$g(x) = f(\arctan x) + \arctan f(x).$$

   Mostre que $g'(0) = 2f'(0)$.

2. Calcule os seguintes limites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{e^{\frac{1}{x}}}, \qquad \lim_{x \to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}.$$

IV.

Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \arctan \dfrac{1}{x}, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x}{1+x^2}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule, caso existam, os valores de:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

b) Diga, justificando, qual é o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

d) Determine, o contradomínio de f. Justifique detalhadamente a sua resposta.

V.

Suponha que f é uma função diferenciável com derivada contínua no intervalo $]0, 1[$, e que satisfaz simultaneamente as duas condições seguintes:

1^{a}) a equação $f(x) = -x$ tem duas soluções diferentes em $]0, 1[$;

2^{a}) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

a) Mostre que $-1 \in f'(]0, 1[)$.

b) Mostre que $[-1, +\infty[\ \subset f'(]0, 1[)$.

Resolução:

I.

1. Atendendo ao significado de $\arctan x$,
$$B = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

   Para A:
$$\frac{x^2+x}{x+2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x}{x+2} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-x-2}{x+2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x+2} \leq 0.$$

   Esta expressão é verdadeira se e só se:
$$(x \leq -\sqrt{2} \quad \wedge \quad x \leq \sqrt{2} \quad \wedge \quad x < -2) \quad \text{ou} \quad (x \geq -\sqrt{2} \quad \wedge \quad x \leq \sqrt{2} \quad \wedge \quad x > -2),$$

   dando, respectivamente,
$$x \in]-\infty, -2[\quad \text{ou} \quad x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],$$

   ou seja,
$$x \in]-\infty, -2[\cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

2. $\inf A$ e $\max B$ não existem.
   Como $A \cup B =]-\infty, -2[\cup \left[-\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, conclue-se que $\sup A \cup B = \frac{\pi}{2}$.
   Como $A \cap B = \left[\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right]$, conclue-se que $\min A \cap B = \frac{\pi}{4}$, e que $\max(A \cap B \cap \mathbb{Q})$ não existe.

3.

   a) Verdadeira: Como $x_n \in B$ para $n = 1, 2, \ldots$, e B é um conjunto limitado, deduz-se que (x_n) é uma sucessão limitada. Por outro lado, por hipótese, (x_n) é monótona. Ora, qualquer sucessão simultaneamente limitada e monótona é convergente. Logo, (x_n) é convergente.

   b) Falsa. Um possível contraexemplo:
$$f(x) = \tan x \quad \text{com} \quad x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n}.$$

   A função f é contínua em B, $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}_1$, $x_n \to \frac{\pi}{2}$ e, no entanto, $f(x_n) \to +\infty$.

   c) Falsa. Um possível contraexemplo:
$$f(x) = \frac{1}{x-3},$$

   definida em A. A função $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua. Além disso, como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ e f é estritamente decrescente, conclue-se que $\sup f(A) = 0$, mas que $0 \notin f(A)$, pelo que f não tem máximo global.

II.

1. A 1ª série é uma série de termos não negativos e por isso pode-se usar um critério de comparação.

   Neste caso, compara-se com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{\frac{\arctan(n^7)}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \arctan(n^7) \to \frac{\pi}{2} \neq 0, +\infty.$$

   Assim, a natureza da série dada é a mesma que a da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Como esta úlima é convergente, conclue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n^7)}{n^2}$$

   é convergente e, sendo de termos não negativos, é absolutamente convergente.

   Como

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{e^2}\right)^n,$$

   esta série é uma série geométrica de razão $r = -\frac{1}{e^2}$. Uma vez que $|r| = \frac{1}{e^2} < 1$, segue-se que a série é absolutamente convergente e a sua soma é

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^2}} = \frac{e^2}{e^2+1}.$$

   Note-se que, das séries dadas, esta é a única para a qual demos um método para o cálculo da soma.

   Quanto à 3ª série, como

$$\left|\frac{\cos(n\pi)}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

   e, como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente, conclue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{1+n^2}$$

   é absolutamente convergente.

   Por fim, como

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \to e^2 \neq 0,$$

   conclue-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$

   é divergente. **Note bem:** Aqui usou-se o critério que estabelece que, se a_n não converge para 0 então $\sum a_n$ é divergente. Se $a_n \to 0$, nada poderíamos concluir por este critério (lembre-se de $\sum \frac{1}{n}$).

2. Trata-se de uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, em que

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2^n}.$$

Cálculo do raio de convergência:

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{(n+1)^2 + 2^{n+1}}{n^2 + 2^n} = \lim \frac{2^{n+1}\left(\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} + 1\right)}{2^n\left(\frac{n^2}{2^n} + 1\right)} = 2.$$

No extremo superior do intervalo de convergência, $x = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{n^2}{2^n} + 1}.$$

Como $\frac{1}{\frac{n^2}{2^n}+1} \to 1 \neq 0$, segue-se que a série é divergente. Do mesmo modo, para o outro extremo, $x = -2$, a série fica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^2 + 2^n}.$$

Como

$$\left| \frac{(-1)^n 2^n}{n^2 + 2^n} \right| = \frac{2^n}{n^2 + 2^n} \to 1,$$

concluimos que também neste caso o termo geral não tende para 0. Logo, a série de potências torna-se numa série numérica divergente se $x = +2$ ou se $x = -2$.

Conclusão:

$$\begin{aligned} x \in]-2, 2[\quad &\Longrightarrow \quad \text{a série é abolutamente convergente,} \\ x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\quad &\Longrightarrow \quad \text{a série é divergente.} \end{aligned}$$

III.

1. Trata-se de uma dupla aplicação da regra da derivação da função composta:

$$g'(x) = (f(\arctan x))' + (\arctan f(x))' = f'(\arctan x).\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(f(x))^2}.f'(x).$$

Logo, tendo em conta que $\arctan 0 = 0$, e que, por hipótese, $f(0) = 0$,

$$g'(0) = f'(0).\frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{1+(f(0))^2}.f'(0) = 2f'(0).$$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, que facilmente se pode levantar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Outra forma de resolver seria por aplicação da regra de Cauchy.

O segundo limite é imediato:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^0} = \frac{\pi}{2}.$$

Note bem: Não sendo nenhuma indeterminação, nunca se poderia usar a regra de Cauchy neste caso.

Quanto ao último limite; $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$ é uma indeterminação do tipo $1^{+\infty}$. Para levantarmos esta indeterminação escrevemos

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} e^{\log(x^{\frac{1}{x-1}})} = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{\log x}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x}{x-1}}.$$

Ora, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\log x}{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$ à qual podemos aplicar a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(\log x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log x}{x-1} = 1,$$

e, por consequência,

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e.$$

IV.

a)

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctan 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

Na segunda passagem, usou-se a regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+x^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

b) Para cada $x \in]-\infty, 0[$: A função f coincide localmente (numa vizinhamça de x) com a soma da constante $\frac{\pi}{2}$ com a composta de $g(y) = \arctan y$ com $h(x) = \frac{1}{x}$. Ora, funções constantes e a função arctan são diferenciáveis em $\mathbb{R}$, enquanto que a função racional $h(x) = \frac{1}{x}$ é diferenciável se $x \neq 0$. Como somas e composições de funções diferenciáveis são diferenciáveis em pontos interiores dos respectivos domínios, conclue-se que f é diferenciável em $]-\infty, 0[$. A derivada neste intervalo é

$$\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}.$$

Para cada $x \in]0, +\infty[$: A função f coincide localmente com a função racional $\psi(x) = \frac{x}{1+x^2}$ a qual é diferenciável. Logo f é diferenciável em $]0, +\infty[$. A derivada neste intervalo é

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Para $x = 0$: Começemos por notar que f é contínua em 0. De facto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

Note-se, no entanto que isto nada nos diz sobre a diferenciabilidade no ponto $x = 0$ (caso diferente seria se tivessemos concluido que f não era contínua em $x = 0$). Usemos a definição de derivada juntamente com a regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(f(x) - f(0))'}{(x - 0)'} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2 + 1} = -1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(f(x) - f(0))'}{(x - 0)'} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = +1.$$

Logo, não existe $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, e, portanto, f não é diferenciável em $x = 0$.

Conclusão: o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2 + 1} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

c) Se $x < 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2+1} < 0$.

Se $x > 0$, $f'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$. Logo $f'(1) = 0$ e

$$\begin{aligned} x \in]0, 1[&\implies f'(x) > 0, \\ x \in]1, +\infty[&\implies f'(x) < 0. \end{aligned}$$

Concluindo: a função f

- é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$,
- tem um mínimo local em $x = 0$ dado por $f(0) = 0$,
- é estritamente crescente em $]0, 1[$,
- tem máximo local em $x = 1$ dado por $f(1) = \dfrac{1}{2}$,
- é estritamente decrescente em $]1, +\infty[$.

Note bem: o extremo local em $x = 0$ não é detectável a partir dos zeros de f' dado que f não é aí diferenciável.

d) Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$, então $f(]-\infty, 0[) \subset]0, \frac{\pi}{2}[$. Como f é contínua, pelo teorema do valor intermédio, todos os valores entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ são assumidos por f em $]-\infty, 0[$. Logo,

$$f(]-\infty, 0[) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, f é contínua em $[0, 1]$ e é estritamente crescente neste intervalo, pelos argumentos invocados acima,

$$f([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Finalmente, como $f(1) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ e f é contínua e estritamente decrescente neste intervalo, segue-se igualmente que

$$f([1, +\infty[) = \left]0, \frac{1}{2}\right].$$

Concluindo:

$$D'_f \equiv f(\mathbb{R}) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left]0, \frac{1}{2}\right] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

V.

a) De acordo com as hipóteses, sejam a e b tais que $0 < a < b < 1$, e tais que

$$f(a) = -a, \quad \text{e} \quad f(b) = -b.$$

Ora, como f é diferenciável em $]0,1[$, então é também diferenciável em $]a,b[$ e contínua em $[a,b]$. Podemos assim aplicar o teorema de Lagrange a f no intervalo $[a,b]$. Deste teorema se conclue que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-b - (-a)}{b - a} = -1,$$

e portanto, como $]a,b[\subset]0,1[$, conclue-se que $-1 \in f'(]0,1[)$.

b) Fixe-se um ponto em $]0,1[$, a, por exemplo.Tome-se uma sucessão (x_n) em $]a,1[$, tal que $x_n \to 1$. Para cada n aplica-se o teorema de Lagrange, garantindo-se assim a existência de um $c_n \in]a, x_n[$ tal que

$$f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Mas, por hipótese, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, o que implica que $f(x_n) \to +\infty$. Portanto,

$$f'(c_n) \to \frac{+\infty - f(a)}{1 - a} = +\infty.$$

Logo, o conjunto $f'(]0,1[)$ não é majorado. Por outro lado, sabemos por a) que $-1 \in f'(]0,1[)$. Como, por hipótese, f' é contínua em $]0,1[$, podemos aplicar o teorema do valor intermédio a f' e concluir que $[-1, +\infty[\subset f'(]0,1[)$.