

Teste de 22.11.99 e resolução.

ANÁLISE MATEMÁTICA I

(Eng^a Biológica, Eng^a Química, Química)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 22/11/1999

Duração: 1h30.

I.

1. Estude, quanto à convergência em $\tilde{\mathbb{R}}$, as sucessões seguintes

$$\frac{n+2}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{3n}, \quad \cos((-1)^n \pi), \quad \sqrt[n]{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

2. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

- a) Mostre que a sucessão é monótona crescente e é limitada.
b) Conclua que a sucessão é convergente e calcule o valor do seu limite.

II.

Seja $S \subset \mathbb{R}$ definido por $S = \{x = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}_1\}$. Justifique que S é limitado e determine $\inf S$ e $\sup S$. Determine ainda, caso existam, $\max S$ e $\min S$.

III.

1. Determine para que valores reais de α e de β é que as seguintes séries são convergentes, e, para a primeira delas, calcule a respectiva soma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\alpha^{3n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{(n^3 + n - 1)^\beta}.$$

2. Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões de termos não-negativos tais que $a_n \rightarrow 1/2$ e $\sum b_n$ é uma série convergente. Estude a natureza das seguintes séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

3. Para cada $p \in \mathbb{N}_1$ considere o conjunto $X_p = [(2p)^{-2}, (2p-1)^{-2}]$. Designe por X a reunião de todos os conjuntos X_p , ou seja $X = \bigcup_{p=1}^{\infty} X_p$. Seja (μ_n) uma sucessão de termos em X .

- a) Suponha que (μ_n) é monótona e que em cada X_p existe um único elemento da sucessão (μ_n) .
(i) mostre que $\mu_n \rightarrow 0$.
(ii) estude a natureza da série $\sum \mu_n$.
b) Suponha agora que temos um intervalo X_p com uma infinidade de elementos de (μ_n) . Investigue a natureza da série $\sum \mu_n$.

Resolução:

I.

1. Atendendo a que

$$\frac{n+2}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} + \frac{2}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} + \frac{2}{n^{1+\frac{1}{n}}},$$

e tendo em conta que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$, conclui-se imediatamente que a sucessão dada é convergente para 1 e, portanto, é convergente em $\tilde{\mathbb{R}}$.

Considerando agora a segunda sucessão tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{3n} &= \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{3n} \\ &= \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{3n} \\ &= \left(\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^n\right)^3 \\ &= \left(\left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n+1}\right)^3 \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{-3} \longrightarrow (e^{-2})^3 \cdot 1^{-3} = e^{-6} \end{aligned}$$

pelo que se conclui que a sucessão dada é convergente.

Como $\cos \pi = \cos(-\pi) = -1$ tem-se que $\cos((-1)^n \pi) = -1, \forall n \in \mathbb{N}_1$, e, portanto, sendo a sucessão constante, é convergente.

Finalmente, para a sucessão $\sqrt[n]{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ vamos primeiro esclarecer a indeterminação obtida a partir do radicando:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, no limite da sucessão originalmente dada ocorre uma indeterminação do tipo 0^0 quando aplicamos directamente as regras operatórias dos limites. Atendendo a que se $\lim(a_{n+1}/a_n)$ existir em $\mathbb{R}$ então $\lim \sqrt[n]{a_n}$ também existe e é igual, podemos tentar esclarecer a indeterminação acerca do limite da sucessão dada atendendo a que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} &= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{n+1-n} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + 1} \longrightarrow \frac{1+1}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

e portanto a sucessão dada no enunciado também converge para 1, sendo, consequentemente, convergente.

- 2.a) Atendendo a que $u_1 = 1, u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} > u_1$ e $u_3 = \sqrt{2+u_2} > \sqrt{2+1} = \sqrt{3} = u_2$ podemos conjecturar que a sucessão (u_n) é monótona (estritamente) crescente. Vejamos se tal é mesmo verdade: seja $P(n)$ a proposição $u_{n+1} - u_n > 0$. Então tem-se: $P(1) : u_2 - u_1 = \sqrt{3} - 1 > 0$ é verdadeira. Assumindo que $P(n)$ é verdadeira vejamos se $P(n+1)$ também o é:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{2+u_{n+1}} - \sqrt{2+u_n} > \sqrt{2+u_n} - \sqrt{2+u_n} = 0,$$

onde na desigualdade foi utilizada a hipótese (de indução) de ser $P(n)$ verdadeira, i.e., $u_{n+1} > u_n$. Isto mostra a monotonia de (u_n) .

Sendo a sucessão monótona (estritamente) crescente conclui-se que u_1 é um minorante do conjunto dos termos da sucessão. Para estimar um majorante observe-se que $u_1 = 1, u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ e ainda $u_3 = \sqrt{2+u_2} < \sqrt{2+2} = 2, u_4 = \sqrt{2+u_3} < \sqrt{2+2} = 2$. Isto *sugere* que se deverá ter $u_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}_1$. Vejamos (por indução): $u_1 = 1 < 2$ é verdade e se $u_n < 2$ então $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} < \sqrt{2+2} = 2$, o que prova o pretendido.

- b) Pelos resultados da alínea anterior concluímos que a sucessão, sendo monótona e limitada, é convergente em $\mathbb{R}$ e portanto existe um real L tal que $u_n \rightarrow L$. Como (u_{n+1}) é uma subsucessão de (u_n) convergirá para o mesmo limite L e portanto

$$L = \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+\lim u_n} = \sqrt{2+L},$$

pelo que L terá de satisfazer a equação algébrica $L = \sqrt{2+L}$, ou seja

$$\begin{aligned} L = \sqrt{2+L} &\Leftrightarrow L^2 = 2+L \\ &\Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (-2)}}{2} \end{aligned}$$

e portanto tem-se, ou $L = -1$ ou $L = 2$. Como (u_n) é estritamente crescente e $u_1 = 1 > 0 > -1$, tem-se que $\lim u_n > -1$, e então $L = 2$.

II.

Atendendo a que $n, m \in \mathbb{N}_1$ conclui-se que

$$-1 < \frac{1}{n} - 1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 1 - \frac{1}{m} < 1 \quad (1)$$

pelo que o conjunto S é limitado, sendo -1 um seu minorante e 1 um majorante. Como $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{m}$ podem ser tão pequenos quanto se queira é de esperar que -1 seja o $\inf S$ e que 1 seja o $\sup S$. Vejamos que, de facto, assim é:

Como $1 = \sup S$ é equivalente a $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S : x > 1 - \varepsilon$, ou seja fixando arbitrariamente $\varepsilon > 0$ deverá ser possível encontrar naturais positivos n e m tais que $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} > 1 - \varepsilon$. Atendendo a esta desigualdade é natural considerar $n = 1$. O problema reduz-se agora a saber se haverá algum $m \in \mathbb{N}_1$ tal que $1 - \frac{1}{m} > 1 - \varepsilon$, ou seja, $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Mas isto é garantido pelo propriedade arquimedean dos números reais, pelo que se pode concluir que $1 = \sup S$.

Para o estudo do infimo o princípio é o mesmo:

$$-1 = \inf S \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n, m \in \mathbb{N}_1 : \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < -1 + \varepsilon.$$

Mas fixando $m = 1$ esta condição reduz-se a $\exists n \in \mathbb{N}_1 : \frac{1}{n} < \varepsilon$, o que é garantido pela propriedade arquimedean.

Atendendo às desigualdades estritas apresentadas em (1) conclui-se que não existem naturais positivos n e m tais que $\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ seja igual quer a -1 quer a 1 , pelo que $\inf S \notin S$ e $\sup S \notin S$ e portanto $\min S$ e $\max S$ não existem.

III.

1. Atendendo a que

$$\frac{2^n}{\alpha^{3n-1}} = \alpha \cdot \frac{2^n}{\alpha^{3n}} = \alpha \cdot \left(\frac{2}{\alpha^3} \right)^n$$

conclui-se que a série dada é uma série de potências de $\frac{2}{\alpha^3}$. Sabemos, portanto, que a série será convergente se e só se $\left| \frac{2}{\alpha^3} \right| < 1$ e que, nestas condições, a sua soma, S , será igual a

$$S = \frac{1}{1 - \frac{2}{\alpha^3}} \cdot \frac{2}{\alpha^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^3 - 2}.$$

Para clarificar melhor os valores de α que tornam a série convergente observe-se que

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{\alpha^3} \right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \frac{2}{\alpha^3} < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 + \frac{2}{\alpha^3} \wedge \frac{2}{\alpha^3} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha^3 + 2}{\alpha^3} \wedge \frac{2 - \alpha^3}{\alpha^3} < 0 \\ &\Leftrightarrow \left[(\alpha > 0) \vee (\alpha < -\sqrt[3]{2}) \right] \wedge \left[(\alpha < 0) \vee (\alpha > \sqrt[3]{2}) \right] \\ &\Leftrightarrow (\alpha < -\sqrt[3]{2}) \vee (\alpha > \sqrt[3]{2}) \\ &\Leftrightarrow \alpha \in]-\infty, -\sqrt[3]{2}[\cup]\sqrt[3]{2}, +\infty[. \end{aligned}$$

Agora para a segunda série note-se que para n muito grande as potências de maior ordem dominam e tem-se

$$\frac{n^2 - 1}{(n^3 + n - 1)^\beta} \approx \frac{n^2}{n^{3\beta}} = \frac{1}{n^{3\beta-2}},$$

pelo que é natural pensar em comparar a série dada com a série de termo geral $1/n^{3\beta-2}$. Observe-se que

$$\frac{\frac{n^2-1}{(n^3+n-1)^\beta}}{\frac{1}{n^{3\beta-2}}} = \frac{(n^2-1)n^{3\beta-2}}{(n^3+n-1)^\beta} = \frac{n^{3\beta} - n^{3\beta-2}}{(n^3+n-1)^\beta} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)^\beta} \longrightarrow 1.$$

Consequentemente, a série dada e a série $\sum \frac{1}{n^{3\beta-2}}$ são da mesma natureza e como esta última é convergente se e só se $3\beta - 2 > 1$, isto é, se e só se $\beta > 1$, concluímos assim o nosso estudo.

2. Sendo a série $\sum b_n$ convergente sabe-se que $b_n \rightarrow 0$. Consequentemente, como $a_n \rightarrow 1/2$, tem-se $a_n + b_n \rightarrow 1/2 + 0 = 1/2 \neq 0$ e portanto a série $\sum (a_n + b_n)$ é divergente.

Observando que $\sqrt[n]{(a_n)^n} = a_n \rightarrow \frac{1}{2} < 1$, o critério da raiz de Cauchy permite concluir que a série $\sum (a_n)^n$ é convergente.

Finalmente, $a_n \rightarrow 1/2$ implica a existência de uma ordem $p \in \mathbb{N}_1$ a partir da qual $a_n < 1$, e, portanto, a partir da qual $a_n b_n < b_n$. Então, como a série $\sum b_n$ é convergente, o critério geral de comparação permite concluir que a série $\sum a_n b_n$ também o é.

3.a) Atendendo às condições dadas no enunciado, os termos da sucessão (μ_n) têm de satisfazer

$$\mu_n \in X_n \iff \frac{1}{(2n)^2} \leq \mu_n \leq \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Consequentemente, como $\frac{1}{(2n)^2} \rightarrow 0$ e $\frac{1}{(2n-1)^2} \rightarrow 0$, o teorema das sucessões encaixadas permite concluir que (μ_n) é convergente e tende também para zero. Além disto, como se tem $X \subset \mathbb{R}^+$ e

$\mu_n \in X_n \subset X, \forall n$, a sucessão (μ_n) é positiva e a segunda desigualdade acima permite-nos concluir, usando o critério geral de comparação, que $\sum \mu_n$ é uma série convergente se $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ o for. Como

$$\frac{\frac{1}{(2n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(2n-1)^2} = \left(\frac{n}{2n-1} \right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2} \in]0, +\infty[,$$

conclui-se que as séries $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ são da mesma natureza e, como a segunda é convergente, a primeira também é.

- b) Se existir um natural q tal que o intervalo X_q tenha uma infinidade de elementos da sucessão (μ_n) então esses elementos constituem uma subsucessão de (μ_n) , digamos (μ_{k_n}) , que satisfazem $\mu_{k_n} \geq \frac{1}{(2q)^2} > 0$ e portanto $\mu_{k_n} \not\rightarrow 0$. Consequentemente a sucessão (μ_n) também não converge para zero e portanto a série $\sum \mu_n$ é divergente.