

Exame de 2.2.00 e resolução.

ANÁLISE MATEMÁTICA I

(Eng^a Biológica, Eng^a Química, Química)

Data: 2/2/2000

Duração: 3h00.

I.

Considere os conjuntos definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(x - \pi)^2}{x + 1} \leq 0 \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x = 2 \arctan(n), n \in \mathbb{N}\}$$

1. Mostre que o conjunto A é igual a $] - \infty, -1[\cup \{\pi\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A , B e $A \cup B$.
2. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo.
 - a) Toda a sucessão de termos em $A \cap V_1(\pi)$ é convergente.
 - b) Toda a sucessão de termos em A estritamente crescente é convergente para um real negativo.
 - c) Qualquer sucessão de termos em A convergente para o ponto $x = -1$ é monótona crescente.
 - d) Todas as sucessões de termos em B que sejam estritamente monótonas são crescentes.

II.

1. Determine a natureza das seguintes séries numéricas

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{7^n + \sin n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cosh \sin \frac{1}{n}.$$

e determine o valor da soma da primeira delas.

2. Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^n + 1}$$

e esclareça qual a natureza da série na fronteira do intervalo de convergência.

III.

Calcule o valor dos seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) \arctan \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cosh x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{x^{-2}}.$$

IV.

Considere a função contínua em $\mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = |x|^\beta e^{-x^2}$$

onde β é um parâmetro real positivo.

- a) Mostre que a função ψ não é diferenciável em todo o $\mathbb{R}$ se e somente se $\beta \leq 1$.

A partir daqui considere sempre $\beta = 1$.

- b) Prove que ψ é uma função par e calcule, caso existam, o valor dos limites de $\psi(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.
- c) Calcule a função derivada ψ'
- d) Determine os intervalos de monotonia e todos os extremos locais de ψ .
- e) Determine o contradomínio de ψ .

V.

- a) Prove que $\forall x > 0$, $\log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$.
- b) Use a desigualdade anterior para estudar a natureza da série numérica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left(\frac{n!+1}{n!} \right).$$

Resolução:

I.

1. Como $(x - \pi)^2 \geq 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{(x - \pi)^2}{x + 1} \leq 0 &\Leftrightarrow x + 1 < 0 \vee (x - \pi)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x < -1 \vee x = \pi \\ &\Leftrightarrow x \in] - \infty, -1[\cup \{\pi\}, \end{aligned}$$

como se pretendia obter. Atendendo a isto tem-se $\sup A = \max A = \pi$ e $\inf A$ e $\min A$ não existem uma vez que A não é minorado. Como B é o conjunto dos termos da sucessão $(2 \arctan(n))$ e como $\lim 2 \arctan(n) = \pi$, conclui-se que B é limitado e portanto existem $\sup B$ e $\inf B$. Como $\arctan(\cdot)$ é uma função estritamente crescente conclui-se que $\sup B = \lim 2 \arctan(n) = \pi$ e não existe $\max B$ uma vez que, pela monotonia estrita da sucessão, tem-se que $2 \arctan(n)$ é sempre inferior ao seu limite. Mais uma vez pela monotonia conclui-se que $\inf B = \min B = 2 \arctan(0) = 2 \cdot 0 = 0$. Atendendo ao que se determinou anteriormente tem-se $\sup(A \cup B) = \max(A \cup B) = \pi$ e $\inf(A \cup B)$ e $\min(A \cup B)$ não existe visto que $A \cup B \supset A$ e A já não era minorado pelo que $A \cup B$ também não o será.

- 2.a) Tendo em atenção que $A \cap V_1(\pi) = (] - \infty, -1[\cup \{\pi\}) \cap]\pi - 1, \pi + 1[= \{\pi\}$, conclui-se que, se (u_n) é uma sucessão de termos em $A \cap V_1(\pi)$, então $\forall n \in \mathbb{N}_1, u_n \in A \cap V_1(\pi) = \{\pi\}$, ou seja, (u_n) é uma sucessão constante e portanto é convergente.

- b) Seja (u_n) uma sucessão de termos em A . Se a sucessão for estritamente crescente então $u_n \neq \pi, \forall n$ uma vez que se, para algum $p \in \mathbb{N}_1$, se tivesse $u_p = \pi$ então $u_{p+1} > u_p = \pi = \sup A$ e portanto $u_{p+1} \notin A$, contrariamente ao assumido. Então, qualquer sucessão (u_n) nestas condições terá de satisfazer $u_n \in] - \infty, -1[$ e portanto, sendo majorada por -1 , a sucessão é convergente e o seu limite terá de ser não superior a -1 o que implica que é um real negativo, como se pretendia provar.

- c) A afirmação é falsa. Um contra-exemplo possível é constituído pela sucessão definida por

$$u_n = \begin{cases} -1 - \frac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ -1 - \frac{1}{n-1} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

De facto tem-se

$$u_{2k-1} = -1 - \frac{1}{2k} > -1 - \frac{1}{2k-1} = u_{2k}$$

$$u_{2k} = -1 - \frac{1}{2k-1} < -1 - \frac{1}{2k+2} = u_{2k+1}$$

e portanto (u_n) não é monótona, embora todos os seus elementos estejam em A e seja convergente para -1 .

d) Seja (u_n) uma sucessão de termos em B estritamente monótona. Se for decrescente então $u_{n+1} < u_n, \forall n$. Seja $m \in \mathbb{N}_1$ fixo arbitrário. Como $u_m \in B$ existirá um $\tilde{m} \in \mathbb{N}_1$ tal que $u_m = 2 \arctan(\tilde{m})$. Mas então o número de elementos de B inferiores a $2 \arctan(\tilde{m})$ é finito e igual a $\tilde{m}$, o que implica que o número de termos da sucessão (u_n) distintos entre si, com $n > m$, será, quanto muito, igual a $\tilde{m}$. Como existem infinitos termos da sucessão (u_n) com $n > m$ isto significa que terá de existir pelo menos uma subsucessão de (u_n) que é constante e portanto a sucessão nunca poderá ser estritamente decrescente, contrariamente ao assumido. Isto mostra o pretendido.

II.

1. Como

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} = \frac{nA + (n-1)B}{(n-1)n} = \frac{n(A+B) - B}{(n-1)n},$$

tem-se $A + B = 0 \wedge -B = +1 \Leftrightarrow A = 1 \wedge B = -1$, ou seja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

Como o termo geral da sucessão das somas parciais satisfaz

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \\ &= 1 - \frac{1}{N} \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

conclui-se que a série dada é convergente e a sua soma é igual a 1.

Observando que

$$\frac{\frac{4^{n+1}}{7^{n+1} + \sin(n+1)}}{\frac{4^n}{7^n + \sin(n)}} = 4 \cdot \frac{7^n + \sin(n)}{7^{n+1} + \sin(n+1)} = 4 \cdot \frac{1 + \frac{\sin(n)}{7^n}}{7 + \frac{\sin(n+1)}{7^n}} \rightarrow \frac{4}{7} < 1,$$

conclui-se, pelo critério da razão, que a segunda série dada é convergente.

Como $\cosh \sin \frac{1}{n} > 1$ conclui-se que o termo geral da série não tende para zero e portanto a série diverge.

2. Seja $a_n = \frac{1}{3^n+1}$. O raio de convergência da série é dado por

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Como

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\frac{1}{3^{n+1}+1}}{\frac{1}{3^n+1}} = \lim \frac{3^n+1}{3^{n+1}+1} = \lim \frac{1+\frac{1}{3^n}}{3+\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3},$$

conclui-se que $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1/3$ e portanto também $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1/3$, pelo que vem $R = 3$. Assim sendo, a série dada é absolutamente convergente sempre que x satisfizer $-3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$ e é divergente se $x \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$. Para $x = -1$ tem-se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{3^n+1}$$

e para $x = 5$ vem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+1}.$$

Como se tem $\frac{3^n}{3^n+1} \rightarrow 1$ conclui-se que qualquer das séries é divergente visto que o termo geral não tende para zero. O intervalo de convergência da série de potências dada é, então, o intervalo $] -1, 5[$.

III.

O primeiro limite é imediato

$$\lim_{x \rightarrow +} (x-1) \arctan \frac{1}{x} = -1 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Para o segundo limite a aplicação directa das regras e propriedades algébricas dos limites fornece uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Como as função no numerador e denominador da expressão a calcular são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tem-se, aplicando a regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log \cosh x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cosh x} \sinh x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{0}{1} = 0,$$

e portanto também se tem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cosh x}{x} = 0$.

Analogamente, o último limite produz uma indeterminação do tipo 1^∞ . Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left[\log \left((\cos x)^{x^{-2}} \right) \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \right],$$

a indeterminação fica transformada numa do tipo $\frac{0}{0}$ e como as funções em causa são todas diferenciáveis em $\mathbb{R}^+$ pode-se aplicar a regra de Cauchy para obter

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log(\cos x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}$$

e portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{x^{-2}} = e^{-1/2}.$$

IV.

- a) A função $x \mapsto e^{-x^2}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. A função $x \mapsto |x|^\beta$ é diferenciável pelo menos em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto $\psi(x)$ é certamente diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qualquer que seja o valor de $\beta > 0$. Para o ponto $x = 0$ tem-se

$$\psi'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|^\beta e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\beta-1} e^{-x^2}.$$

Como $x^{\beta-1} \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow 0^+$ se $\beta - 1 < 0$, conclui-se que ψ não é diferenciável se $\beta < 1$. Se $\beta = 1$ tem-se $x^{\beta-1} = x^0 = 1$ e então $\psi'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x^2} = 1$. Para a derivada à esquerda em 0 tem-se, quando $\beta = 1$,

$$\psi'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-xe^{-x^2}}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x^2} = -1$$

e como $\psi'_e(0) = -1 \neq 1 = \psi'_d(0)$ conclui-se que ψ também não é diferenciável se $\beta = 1$. Ou seja, ψ não é diferenciável de $\beta \leq 1$. Quando $\beta > 1$ tem-se pelos cálculos anteriores

$$\psi'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\beta-1} e^{-x^2} = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$\psi'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)^{\beta-1} e^{-x^2} = 0 \cdot 1 = 0,$$

pelo que ψ é diferenciável nestas circunstâncias, o que prova o pretendido.

- b) Como $\psi(-x) = |-x|e^{-(-x)^2} = |x|e^{-x^2} = \psi(x)$, conclui-se que ψ é par.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x|e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}}.$$

Usando a regra de Cauchy tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

pelo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$. Como ψ é par tem-se, com $x = -y$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \lim_{-y \rightarrow -\infty} \psi(-y) = \lim_{-y \rightarrow -\infty} \psi(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \psi(y) = 0.$$

c) Sabemos que ψ só é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e tem-se

$$\psi(x) = \begin{cases} xe^{-x^2} & \text{se } x > 0 \\ -xe^{-x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

pelo que, usando as regras de derivação, tem-se

$$\psi'(x) = \begin{cases} (1 - 2x^2)e^{-x^2} & \text{se } x > 0 \\ (-1 + 2x^2)e^{-x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

d) O sinal de ψ' é, atendendo à expressão determinada na alínea anterior, o seguinte

$$\begin{aligned} x < -\frac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \psi'(x) > 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0 &\Rightarrow \psi'(x) < 0 \\ 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \psi'(x) > 0 \\ x > \frac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \psi'(x) < 0 \end{aligned}$$

pelo que ψ é crescente em $] -\infty, -1/\sqrt{2}[$ e em $]0, 1/\sqrt{2}[$ e é monótona decrescente em $] -1/\sqrt{2}, 0[$ e em $]1/\sqrt{2}, +\infty[$. Atendendo a que ψ é contínua em $\mathbb{R}$ é contínua também em $x = 0$. Sendo decrescente em $] -1/\sqrt{2}, 0[$ e crescente em $]0, 1/\sqrt{2}[$ conclui-se que em $x = 0$ a função ψ tem um mínimo relativo. Como $\psi(x) = |x|e^{-x^2} \geq 0$ conclui-se ainda que o mínimo em $x = 0$ é, de facto, absoluto. Como $\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1/\sqrt{2} \vee x = 1/\sqrt{2}$ e os sinais da função derivada são os apresentados acima conclui-se que estes dois pontos são pontos de máximo relativo. Tem-se $\psi(1/\sqrt{2}) = \psi(-1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$ e, atendendo ao comportamento de ψ , conclui-se que o máximo relativo de ψ é, de facto, absoluto.

e) Pelos resultados das alíneas anteriores conclui-se que $\psi(\mathbb{R}) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\right]$.

V.

- a) Como $x \mapsto \log x$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^+$ tem-se, fixando $x > 0$ arbitrário e aplicando o Teorema de Lagrange a esta função no intervalo $[x, 1+x]$,

$$\frac{\log(1+x) - \log(x)}{1+x-x} = \frac{1}{c}$$

para algum $c \in]x, 1+x[$. Como $c > x \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ obtém-se finalmente $\log(1+x) - \log(x) < \frac{1}{x}$, como se pretendia.

- b) Como

$$\log\left(\frac{n!+1}{n!}\right) = \log(n!+1) - \log n! < \frac{1}{n!}$$

e como $\sum \frac{1}{n!}$ é uma série convergente conclui-se, pelo critério geral de comparação, que a série dada é convergente.