

Exame de 19.1.00 e resolução.

ANÁLISE MATEMÁTICA I

(Eng^a Biológica, Eng^a Química, Química)

Data: 19/1/2000

Duração: 3h00.

I.

Considere os conjuntos definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x \log x} > 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1 \right\}$$

1. Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o infimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.
2. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo.
 - a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.
 - b) Toda a sucessão de termos em A que não seja limitada tende para $+\infty$.
 - c) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.
 - d) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

II.

Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{1+5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

III.

Considere a sucessão (ω_n) definida por $\omega_1 = 1$ e, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $\omega_{n+1} = 1 + \frac{1}{\omega_n}$.

- a) Mostre que (ω_n) está limitada entre 1 e 2.
- b) Mostre que a subsucessão dos termos de ordem par é decrescente se e só se a subsucessão dos termos de ordem ímpar for crescente.
- c) Prove que a subsucessão dos termos de ordem par é decrescente.
- d) Justifique que a sucessão (ω_n) é convergente e determine o valor do seu limite.

IV.

Estude para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ é que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}$$

é simplesmente convergente, absolutamente convergente e divergente.

V.

Calcule o valor dos seguintes limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{-2/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\cos x \sin x} \right)$$

VI.

Considere a função contínua em $\mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \beta e^{x^2+x}, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Determine o valor de β .
- b) Calcule, caso existam, o valor dos limites de $\psi(x)$ quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.
- c) Determine o domínio de diferenciabilidade de ψ e calcule ψ' .
- d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de ψ .
- e) Determine o contradomínio de ψ .

VII.

Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, limitada e estritamente crescente. Considere que $f(0) = 0$.

- a) Mostre que $\exists \alpha > 0 :]0, \alpha] \subset f'([0, +\infty[)$.
- b) Mostre que existe pelo menos um ponto de $\mathbb{R}$ onde a segunda derivada de f é igual a zero.

Resolução:

I.

1. Observando que $\log x$ só está definido para $x > 0$ e que

	0	1
$x - 1$	−	+
x	0	+
$\log x$	...	+

conclui-se que o domínio de $\frac{x-1}{x \log x}$ é $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e neste conjunto a expressão é positiva, pelo que $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, como se pretendia.

Como $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ é ilimitado à direita, não tem majorantes e, portanto, não tem supremo e, consequentemente, não tem máximo. Os minorantes de A são os números reais que satisfazem $x \leq 0$. Consequentemente $x = 0$ é o ínfimo (o maior dos minorantes) e, como $0 \notin A$, o conjunto A não tem mínimo.

Atendendo a que $B \subset \mathbb{R}^-$ e $A \subset \mathbb{R}^+$ as conclusões sobre o supremo e o máximo de A permanecem válidas para $A \cup B$. Quanto aos minorantes de $A \cup B$ tem-se agora: x é minorante de $A \cup B$ se e só se $x \leq y$ para qualquer y em $A \cup B$. Consequentemente tem-se de se ter $x \leq -1$, visto que -1 é o menor elemento de B , correspondente a $n = 1$. Isto permite concluir que o ínfimo de $A \cup B$ é -1 e, como $-1 \in A \cup B$, concluir que $A \cup B$ tem mínimo.

2.

- a) A proposição é falsa, já que, por exemplo, a sucessão

$$u_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 4 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

é limitada, tem todos os termos em A e é divergente.

- b) A proposição é também falsa: a sucessão

$$v_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

é ilimitada e não tende para $+\infty$ uma vez que tem uma subsucessão que não tende para $+\infty$.

- c) O conjunto $A \cap V_{1/2}(0) =]0, 1/2[$ é limitado. Se (u_n) for uma sucessão monótona, de termos neste conjunto, então será monótona e limitada e, portanto, convergente.

- d) Seja (u_n) uma sucessão de termos em $A \cup B$ estritamente decrescente. Como $B \subset \mathbb{R}^-$ e $A \subset \mathbb{R}^+$ conclui-se que, se existe um natural p tal que $u_p \in B$ então $u_n \in B, \forall n > p$. Mas se $u_p \in B$ então $u_p = -\frac{1}{m}$ para algum m natural, devido à definição de B . Então $n > p \Rightarrow u_n < u_p = -\frac{1}{m}$. Mas como existe apenas um número finito de elementos de B menores que $-\frac{1}{m}$ (de facto, apenas $m-1$ elementos de B estão nestas condições) então (u_n) teria de ser constante a partir de certa ordem, o que não pode acontecer uma vez que a sucessão é estritamente decrescente. Esta contradição mostra que qualquer sucessão (u_n) nas condições do enunciado tem de pertencer a A . Consequentemente o seu limite pode ser qualquer ponto de A e também $x = 0$ e $x = 1$, ou seja, $\mathbb{R}_0^+$, e portanto a proposição é verdadeira.

II.

Utilizando o critério da razão de D'Alembert para a primeira série tem-se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{1+5^{n+1}}}{\frac{4^n}{1+5^n}} = \frac{4^{n+1}(1+5^n)}{4^n(1+5^{n+1})} = 4 \frac{1+5^n}{1+5^{n+1}} \longrightarrow \frac{4}{5} < 1$$

e portanto a série dada é convergente.

Para a série de termo geral $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, podemos observar que se trata de uma série de Mengoli e portanto a soma parcial até N é

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^N \sqrt{n+1} - \sum_{n=1}^N \sqrt{n} \\ &= \sum_{n=2}^{N+1} \sqrt{n} - \sum_{n=1}^N \sqrt{n} \\ &= \sqrt{N+1} + \sum_{n=2}^N \sqrt{n} - \sqrt{1} - \sum_{n=2}^N \sqrt{n} \\ &= \sqrt{N+1} - 1 \end{aligned}$$

Como $\lim S_N = \lim(\sqrt{N+1} - 1) = +\infty$, conclui-se que a série dada é divergente.

III.

a) Provaremos esta afirmação por indução: para $n = 1$ tem-se $\omega_1 = 1 \in [1, 2]$. Supondo agora que, para $n \in \mathbb{N}_1$ fixo é válido $1 \leq \omega_n \leq 2$, então tem-se

$$1 \leq \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{\omega_n} \leq 1 + \frac{1}{1} = 2$$

o que, atendendo a que $\omega_{n+1} = 1 + \frac{1}{\omega_n}$, mostra o pretendido.

b) Observando que $\omega_{2n} = 1 + \frac{1}{\omega_{2n-1}}$ tem-se imediatamente que se (ω_{2n-1}) for crescente então $\left(\frac{1}{\omega_{2n-1}}\right)$ é decrescente e portanto $(\omega_{2n}) = \left(1 + \frac{1}{\omega_{2n-1}}\right)$ é também decrescente, e vice-versa, o que prova a proposição.

c) Provaremos isto por indução: pretendendo mostrar que $\omega_{2(n+1)} - \omega_{2n}$ é decrescente, comecemos com o caso $n = 1$: como $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$, $\omega_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\omega_4 = 1 + \frac{1}{3/2} = \frac{5}{3}$, conclui-se que $\omega_4 - \omega_2 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3} < 0$. Supondo agora que $\omega_{2(n+1)} - \omega_{2n} < 0$ vejamos se também se verifica que $\omega_{2(n+2)} - \omega_{2(n+1)} < 0$. Pela definição de ω_n tem-se

$$\begin{aligned} \omega_{2(n+2)} - \omega_{2(n+1)} &= 1 + \frac{1}{\omega_{2n+3}} - 1 - \frac{1}{\omega_{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\omega_{2n+3}} - \frac{1}{\omega_{2n+1}} \\ &= \frac{\omega_{2n+1} - \omega_{2n+3}}{\omega_{2n+3}\omega_{2n+1}} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\omega_{2n}} - 1 - \frac{1}{\omega_{2n+2}}}{\omega_{2n+3}\omega_{2n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{\omega_{2n}} - \frac{1}{\omega_{2n+2}}}{\omega_{2n+3}\omega_{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_{2n+2} - \omega_{2n}}{\omega_{2n+3}\omega_{2n+2}\omega_{2n+1}\omega_{2n}} \\
&< 0
\end{aligned}$$

onde o sinal da desigualdade vem dos factos de o denominador ser positivo (visto que $\omega_n \geq 1 > 0$) e de o numerador ser negativo, pela hipótese de indução. Isto prova o pretendido.

- d) Como (ω_{2n}) é limitada e monótona, é convergente para um número real, digamos K . Pela alínea b) o mesmo se passa para a sucessão (ω_{2n-1}) , a qual será convergente para um número real (não necessariamente igual ao anterior), digamos L . É claro que $K, L \in [1, 2]$. Atendendo a que

$$\omega_{2n} = 1 + \frac{1}{\omega_{2n-1}}$$

tem-se, passando ao limite,

$$L = 1 + \frac{1}{K} \iff LK = K + 1.$$

Por outro lado, também

$$\omega_{2n+1} = 1 + \frac{1}{\omega_{2n}}$$

pelo que, analogamente,

$$K = 1 + \frac{1}{L} \iff LK = L + 1.$$

Consequentemente $K + 1 = L + 1$ e portanto $K = L$. Então L tem de satisfazer $L = 1 + \frac{1}{L}$, donde se obtém $L^2 - L - 1 = 0$ o que, pela fórmula resolvente e porque $L \in [1, 2]$, resulta em $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

IV.

A série será absolutamente convergente se e só se a série dos módulos for convergente. Como

$$\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} \sim \frac{n^2}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

tem-se

$$\frac{\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}}{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} = \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} n^{\alpha-1} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha+1} \longrightarrow 1,$$

pelo que as séries $\sum \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}$ e $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ têm a mesma natureza. Como esta última é convergente se e só se $\alpha - 1 > 1$, isto é $\alpha > 2$, conclui-se que a série dada é absolutamente convergente para estes valores de α . Para os restantes valores de α , isto é, para $\alpha \in]1, 2]$ a série não é absolutamente convergente. Como se trata de uma série alternada vamos estudar a sua natureza aplicando o critério de Leibnitz. Tem-se

$$\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} < \frac{n^2}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \longrightarrow 0;$$

além disto, verifica-se que

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)^2}{(n+2)^{\alpha+1}} - \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} &= \frac{(n+1)^2(n+1)^{\alpha+1} - n^2(n+2)^{\alpha+1}}{(n+1)^{\alpha+1}(n+2)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{n^2((n+1)^{\alpha+1} - (n+2)^{\alpha+1}) + 2n(n+1)^{\alpha+1} + (n+1)^{\alpha+1}}{(n+1)^{\alpha+1}(n+2)^{\alpha+1}},
\end{aligned}$$

e, como

$$(n+1)^{\alpha+1} - (n+2)^{\alpha+1} = (n+1)^{\alpha+1} - [(n+1) - 1]^{\alpha+1} < (n+1)^{\alpha+1} - (n+1)^{\alpha+1} - 1 = -1 < 0,$$

conclui-se que o limite do numerador da expressão acima é $-\infty$ e, portanto, para n suficientemente grande, a expressão é negativa, ou seja, a sucessão é decrescente e o critério de Leibnitz permite afirmar que a série é convergente. Como, conforme já se viu, para estes valores de α a série dos módulos é divergente, concluímos que a série é simplesmente convergente. Tem-se, então, o seguinte:

$$\begin{aligned}\alpha > 2 & : \text{ a série é absolutamente convergente,} \\ 1 < \alpha \leq 2 & : \text{ a série é simplesmente convergente,} \\ 1 \geq \alpha & : \text{ a série é divergente.}\end{aligned}$$

V.

Observando que $(\log x)^{-2/x} = e^{\log((\log x)^{-2/x})} = \exp\left(-\frac{2}{x} \log \log x\right) = \exp\left(-2 \frac{\log \log x}{x}\right)$. Como, quando $x \rightarrow +\infty$ a função $\frac{\log \log x}{x}$ dá origem a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e como as funções em causa são diferenciáveis, podemos tentar aplicar a regra de Cauchy: sendo

$$\frac{(\log \log x)'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{\log x} \frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x \log x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

conclui-se que também $\frac{\log \log x}{x} \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ e portanto

$$(\log x)^{-2/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-2 \cdot 0} = 1.$$

Para o caso do outro limite observe-se que

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\cos x \sin x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{\sin 2x} = \frac{\sin 2x - 2x}{x \sin 2x}.$$

Atendendo a que todas as funções em causa são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ pode-se aplicar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação que surge na aplicação directa das regras operativas dos limites, vindo então

$$\frac{(\sin 2x - 2x)'}{(x \sin 2x)'} = \frac{2 \cos 2x - 2}{\sin 2x + 2x \cos 2x}. \quad (1)$$

Como, quando $x \rightarrow 0$, a expressão no membro direito volta a originar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, podemos novamente tentar aplicar a regra de Cauchy: tendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos 2x - 2)'}{(\sin 2x + 2x \cos 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2x}{4 \cos 2x - 4x \sin 2x} = 0,$$

conclui-se que o limite de (1) é também 0 e que, portanto, a função dada também tende para 0 quando $x \rightarrow 0$.

VI.

a) Sendo ψ contínua em $\mathbb{R}$ será, em particular, contínua em 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \psi(x) = \psi(0).$$

Como $\psi(0) = \beta e^0 = \beta$, e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ conclui-se que $\beta = \frac{\pi}{2}$.

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2} e^{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2} e^{x(x+1)} = +\infty\end{aligned}$$

- c) A função $\arctan \frac{1}{x}$ é a composta das funções $x \mapsto y = \frac{1}{x}$ e $y \mapsto z = \arctan y$, as quais são ambas contínuas e diferenciáveis nos respectivos domínios. Consequentemente, ψ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$; analogamente, $\psi(x) = \frac{\pi}{2}e^{x^2+x}$ se $x < 0$ e como a função no membro direito é diferenciável em $\mathbb{R}^-$ por ser a composta de funções aí diferenciáveis, conclui-se finalmente que a função dada será diferenciável em todo o $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. O estudo do caso fronteira, $x = 0$, tem de ser feito separadamente:

$$\psi'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\pi}{2}e^{x^2+x} - \frac{\pi}{2}}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x^2+x} - 1}{x}.$$

Aplicando a regra de Cauchy tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{x^2+x} - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2x+1)e^{x^2+x}}{1} = 1 \Rightarrow \psi'_e(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Analogamente,

$$\psi'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\psi(x) - \psi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x}.$$

Novamente pela regra de Cauchy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\arctan \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-1/x^2}{1+(1/x)^2}}{1} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + x^2} = -1 \Rightarrow \psi'_d(0) = -1.$$

Consequentemente, ψ não é diferenciável em $x = 0$ e o domínio de diferenciabilidade é, assim, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pelas regras de derivação tem-se, atendendo aos cálculos já feitos acima

$$\psi'(x) = \begin{cases} -(1+x^2)^{-1} & \text{se } x > 0, \\ \frac{\pi}{2}(2x+1)e^{x^2+x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- d) O estudo do sinal da primeira derivada fornece o seguinte:

$$\begin{aligned} x > 0 &\implies \psi'(x) < 0 &\implies \psi(x) \text{ é estritamente decrescente,} \\ x < 0 &\implies \psi'(x) < 0 \text{ se } x < -1/2 &\implies \psi(x) \text{ é estritamente decrescente,} \\ &\psi'(x) > 0 \text{ se } x > -1/2 &\implies \psi(x) \text{ é estritamente crescente.} \end{aligned}$$

Consequentemente, como ψ é contínua em $\mathbb{R}$, conclui-se que possui um mínimo local em $x = -\frac{1}{2}$ e um máximo local em $x = 0$.

- e) Sendo ψ contínua em $\mathbb{R}$, $\psi(x) > 0$ e atendendo ao comportamento determinados em b) e d), conclui-se que 0 é o ínfimo do contradomínio de ψ e que não é mínimo, além disto, obtém-se ainda que ψ não é limitado. Pela continuidade de ψ sabe-se que o contradomínio é um intervalo, pelo que se conclui que $\psi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

VII.

- a) Sendo f limitada e monótona terá limite quando $x \rightarrow +\infty$, digamos $\beta > 0$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existirá $x_0 > 0$ tal que $f(x) = \beta - \varepsilon$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ pode-se aplicar o Teorema de Lagrange entre 0 e x_0 e concluir que existe $\xi_0 \in]0, x_0[$ tal que

$$f'(\xi_0) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{\beta - \varepsilon}{x_0} < \frac{\beta}{x_0}.$$

Por outro lado, para $x > x_0$ existe também $\xi \in]0, x[$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} < \frac{\beta}{x} < \frac{\beta}{x_0}.$$

Como $\beta/x \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow +\infty$ e devido a f' ser contínua (visto que é diferenciável) conclui-se que, fixando $\alpha < \frac{\beta}{x_0}$ e escolhido arbitrariamente $0 < \delta \leq \alpha$, existe sempre pelo menos um $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $f'(y)$ é igual a δ . Isto mostra o que se pretendia.

- b) O que foi feito na alínea anterior para $x > 0$ pode ser repetido com $x < 0$ e concluimos que também $]0, \alpha] \subset f'(\mathbb{R}^-)$, para algum α que pode ser considerado comum aos dois casos (considearndo o menor deles, por exemplo). Escolha-se $\gamma \in]0, \alpha]$ arbitrário. Existem $x_1 \in \mathbb{R}^-$ e $x_2 \in \mathbb{R}^+$ tais que $f'(x_1) = \gamma f'(x_2)$. Então, como f' é diferenciável (e portanto também contínua) em $\mathbb{R}$, pode-se aplicar o Teorema de Rolle em $[x_1, x_2]$ e concluir que existe $\xi \in]x_1, x_2[$ tal que $f''(\xi) = 0$, como se pretendia mostrar.