

## ANÁLISE MATEMÁTICA II

9ª Ficha de Exercícios

(Eng.<sup>a</sup> Biológica, Eng.<sup>a</sup> Química, Química)

### Derivação da função composta

1. Calcule  $F'(t)$  e  $F''(t)$  nos casos em que a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por
  - a)  $F(t) = f[g(t)]$ , com  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $g(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2$ ,
  - b)  $F = f \circ g$ , com  $f(x, y) = e^{xy} \cos(xy^2)$ ,  $g(t) = (\cos t, \sin t)$ ,
  - c)  $F(t) = f(X(t), Y(t))$ , com  $f(x, y) = \log \left[ (1 + e^{x^2}) / (1 + e^{y^2}) \right]$ ,  $X(t) = e^t$ ,  $Y(t) = e^{-t}$ .
2. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = F[g(x, y)]$ , com  $F(t) = e^{\sin t}$ ,  $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ . Calcule  $\partial f / \partial x$  e  $\partial f / \partial y$  usando o teorema da derivação da função composta. Verifique o resultado determinando explicitamente  $f(x, y)$  e calculando as derivadas parciais directamente.
3. As expressões  $u = f(x, y)$ ,  $x = X(s, t)$ ,  $y = Y(s, t)$ , definem  $u$  como função de  $s$  e  $t$ , digamos  $u = F(s, t)$ . Exprima as derivadas parciais de 1ª. e 2ª. ordem da função  $F$  em termos das derivadas parciais de 1ª. e 2ª. ordem da função  $f$ , quando:
  - a)  $X(s, t) = s + t$ ,  $Y(s, t) = st$ ,
  - b)  $X(s, t) = st$ ,  $Y(s, t) = s/t$ ,
  - c)  $X(s, t) = (s - t)/2$ ,  $Y(s, t) = (s + t)/2$ .
4. Responda à questão semelhante à anterior quando  $u = f(x, y, z)$ ,  $x = X(r, s, t)$ ,  $y = Y(r, s, t)$ ,  $z = Z(r, s, t)$ , e quando:
  - a)  $X(r, s, t) = r + s + t$ ,  $Y(r, s, t) = r - 2s + 3t$ ,
  - b)  $X(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2$ ,  $Y(r, s, t) = r^2 - s^2 - t^2$ ,  $Z(r, s, t) = r^2 - s^2 + t^2$ .
5. Responda à questão semelhante à questão 3, quando  $u = f(x, y, z)$ ,  $x = X(s, t)$ ,  $y = Y(s, t)$ ,  $z = Z(s, t)$ , e quando:
  - a)  $X(s, t) = s^2 + t^2$ ,  $Y(s, t) = s^2 - t^2$ ,  $Z(s, t) = 2st$ ,
  - b)  $X(s, t) = s + t$ ,  $Y(s, t) = s - t$ ,  $Z(s, t) = st$ .
6. Responda à questão semelhante à questão 3, quando  $u = f(x, y)$ ,  $x = X(r, s, t)$ ,  $y = Y(r, s, t)$ , e quando:

- a)  $X(r, s, t) = r + s, \quad Y(r, s, t) = t,$   
 b)  $X(r, s, t) = r + s + t, \quad Y(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2,$   
 c)  $X(r, s, t) = r/s, \quad Y(r, s, t) = s/t.$

7. Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^2$ . Mostre que  $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ , onde  $c$  é uma constante, satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

8. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Mostre que  $u(x, y) = f(xy)$ , satisfaz a equação

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

9. Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que

$$f(x, y) = e^{x+2y} \mathbf{e}_1 + \sin(y + 2x) \mathbf{e}_2,$$

$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3) \mathbf{e}_1 + (2v - u^2) \mathbf{e}_2.$$

- a) Calcule as matrizes jacobianas  $Df(x, y)$  e  $Dg(u, v, w)$ .  
 b) Calcule a função composta  $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$ .  
 c) Calcule a matriz jacobiana  $Dh(1, -1, 1)$ .

10. Sejam  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + z) \mathbf{e}_1 + (2x + y + z^2) \mathbf{e}_2,$$

$$g(u, v, w) = uv^2w^2 \mathbf{e}_1 + w^2 \sin v \mathbf{e}_2 + u^2 e^v \mathbf{e}_3.$$

- a) Calcule as matrizes jacobianas  $Df(x, y, z)$  e  $Dg(u, v, w)$ .  
 b) Calcule a função composta  $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$ .  
 c) Calcule a matriz jacobiana  $Dh(u, 0, w)$ .

11. Sejam  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tais que  $g(x, y) = (e^{xy^2}, e^{x^2y}, xy)$ ,  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ ,  $f(1, 1, 0) = (1, 0)$  e

$$Df(1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Justifique que  $g \circ f$  e  $f \circ g$  são diferenciáveis e identifique as aplicações  $(g \circ f)'(1, 1, 0)$  e  $(f \circ g)'(1, 0)$ .