Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

8^a Ficha de Exercícios

(Eng.$^{\text{a}}$ Biológica, Eng.$^{\text{a}}$ Química, Química)

Diferenciabilidade

1. Seja
$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\,,\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

   a) Calcule as derivadas parciais de f nos seus domínios.

   b) Mostre que as derivadas parciais de f não são contínuas em $(0,0)$.

   c) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

2. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x,y)=\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\sin(x^2+y^2)$.

   a) Mostre que f é prolongável por continuidade a $(0,0)$ e, sendo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o seu prolongamento, determine $F(0,0)$.

   b) Mostre que F não é diferenciável em $(0,0)$.

   c) Determine $D_{(\nu_1,\nu_2)}F(0,0)$ com $\nu_1,\nu_2\neq 0$, e verifique que
$$D_{(\nu_1,\nu_2)}F(0,0)\neq\nabla F(0,0)\cdot(\nu_1,\nu_2).$$

3. Seja $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $g(0,0)=0$ e $g(x,y)=\frac{y^4x}{x^2+y^4}\arcsin(xy)$, se $(x,y)\neq(0,0)$. Estude a diferenciabilidade de g na origem.

4. Seja $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, diferenciável em $(1,2)$ tal que $D_{(1,1)}\psi(1,2)=\boldsymbol{e}_1$ e $D_{(-1,1)}\psi(1,2)=2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1$. Calcule a matriz Jacobiana de ψ no ponto $(1,2)$.

5. Considere a função h definida em $\mathbb{R}^2$ e tal que $h(x,y)=1+xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$.

   a) Se h for contínua na origem qual será o valor de $h(0,0)$?

   b) Calcule $D_1h(a,0)$ e $D_2h(a,0)$, onde a é um número real. (Se $a=0$ suponha que $h(0,0)=1$.)

6. Seja a função f definida pela expressão

$$f(x,y,z) = \exp\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

a) Determine o domínio D de f e interprete-o geometricamente.

b) Dê um exemplo de uma sucessão de elementos de D que não tenha subsucessões convergentes.

c) Estude a função f quanto à diferenciabilidade, calcule as funções derivadas parciais e calcule ainda $D_{(1,-1,e)}f(0,0,1)$.

7. Seja φ definida pela expressão

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x+y > 0\,, \\ x+y & \text{se } x+y \leq 0\,. \end{cases}.$$

a) Estude a diferenciabilidade de φ em $(0,0)$.

b) Determine, caso existam, as derivadas de φ segundo o vector $(1,1)$ nos pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$.

8. Seja θ definida pela expressão

$$\theta(x,y) = \sqrt{|xy|}.$$

a) Calcule as derivadas parciais de θ no ponto $(0,0)$.

b) Verifique se θ é ou não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

c) Indique, justificando, qual o dominio de diferenciabilidade de θ.

d) Verifique se existe derivada de θ segundo o vector $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ nos pontos $(0,0)$ e $(3,5)$. No caso de existir alguma delas calcule o seu valor.

9. Considere as funções definidas em $\mathbb{R}^n$ pelas expressões

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2, \quad f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^4, \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}, \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cdot T(\boldsymbol{x}),$$

onde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ é um vector arbitrário fixo e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função linear. Para cada uma delas calcule $D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{x})$, para $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ arbitrários.

10. Dado um campo escalar diferenciável num ponto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$, suponha que $D_{(2,3)}(\boldsymbol{a}) = 1$ e $D_{(1,1)}(\boldsymbol{a}) = 2$. Calcule $\nabla f(\boldsymbol{a})$ e faça um esboço do conjunto de vectores $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^2$ para os quais $D_{\boldsymbol{v}}f(\boldsymbol{a}) = 6$.

11. Em $\mathbb{R}^3$ sejam $\boldsymbol{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ e $r(x,y,z) = \|\boldsymbol{r}(x,y,z)\|$.

   a) Mostre que $\nabla r(x,y,z)$ é um vector unitário com a direcção de $\boldsymbol{r}(x,y,z)$.

   b) Mostre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$, se n é um natural positivo.

   c) A expressão da alínea anterior permanecerá válida se $n \in \mathbb{Z}_0^-$?

   d) Encontre um campo escalar f tal que $\nabla f = \boldsymbol{r}$.

12. Seja $f : B_r(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável na bola aberta $B_r(\boldsymbol{a})$.

   a) Se $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$ para todos os $\boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{a})$, mostre que f é constante em $B_r(\boldsymbol{a})$

   b) Se $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ para todo o $\boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{a})$ prove que $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$.