Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

7^a Ficha de Exercícios

(Eng^a Biológica, Eng^a Química, Química)

Continuidade e Limites

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Para cada $c \in \mathbb{R}$, considere o conjunto

$$N_c = \{c \in \mathbb{R}^n \, : \, f(x) = c\} \, .$$

   a) Mostre que, se f é contínua, N_c é fechado, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

   b) Dê um exemplo de uma função f e de $c \in \mathbb{R}$, tal que N_c não é fechaodo.

2. Calcule ou mostre que não existem, os seguintes limites:

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$, b) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\sin\log(x+y)}$,

   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$, d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^2}{(x^4+2y^2)^2}$,

   e) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-1}{x-1+y-\log x}$

3. Seja $f(x,y) = 0$ se $y \leq 0$ ou se $y \geq x^2$, e seja $f(x,y) = 1$, se $0 < y < x^2$. Mostre que $f(x,y) \to 0$, quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo de qualquer recta que passe pela origem. Encontre uma curva que passe pela origem ao longo da qual (excepto na origem) $f(x,y)$ tem o valor constante 1. Será f contínua na origem? Justifique.

4. Para cada uma das funções seguintes determinar o domínio e o conjunto de pontos de descontinuidade:

   a) $f(x,y) = \sqrt{H(1-x^2-y^2)}$, onde $H(\cdot)$ é a função de Heaviside.

   b) $\psi(x,y) = x^{y^2}$

   c) $g(x,y) = \arccos\sqrt{x/y}$

   d) $\boldsymbol{\varphi}(x,y,z) = \left(\log\sqrt{x^2+y^2+z^2}, (1-x^2-y^2-z^2)^{-1}\right)$

   e) $h(u,v,w) = \tan\frac{u^2}{vw}$

5. Seja $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Suponha que existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \theta(x,y)$ e é igual a L. Suponha ainda que existem os limites unidireccionais $\lim_{x\to a} \theta(x,y)$ e $\lim_{y\to b} \theta(x,y)$. Então, mostre que os limites iterados existem e são ambos iguais a L.

6. Considere a função

$$\theta(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} & \text{se } y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

Mostre que $\theta(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to 0$ mas que os limites iterados não são iguais. Explique porque razão isto não contradiz o resultado provado no exercício anterior.

7. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x\sqrt{|y|})}{x^2+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Mostre que $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0\,.$

b) Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

c) Verifique que existem as derivadas parciais de f em $(0,0)$ e calcule-as.

(*Recomendação: É extremamente útil que após ou durante—mas NUNCA* antes *ou* em vez de—*o estudo e resolução das questões 2., 3., 4a)-c), 6. e 7. as funções aí apresentadas sejam visualmente exploradas utilizando a representação gráfica fornecida por software apropriado, como o Mathematica, variando os diferentes parâmetros das representações gráficas, tais como o "ViewPoint", "PlotRange", escalas, resoluções, etc. A exploração visual dos gráficos é extremamente importante para o desenvolvimento de uma intuição sobre os diferentes comportamentos possíveis, mas, tal como qualquer exploração, deve ser devidamente guiada—neste caso pelo estudo analítico—sem o que o resultado final será normalmente pouco proveitoso e quase certamente desastroso!!!*)