Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

6^a Ficha de Exercícios

(Eng^a Biológica, Eng^a Química, Química)

Estruturas algébrica, métrica e topológica de $\mathbb{R}^n$

1. Considere os seguintes conjuntos

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge 4x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\right\}$$
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\right\}$$
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| + |y| \leq 2\right\}$$
$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x+y) \leq 0\right\}$$
$$G = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sin\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \geq 0\right\}$$
$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{n} \wedge \sqrt{x^2+z^2} \leq \frac{1}{n}\right\}$$
$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : n + \log\|\mathbf{x} - n\mathbf{1}\| \in \mathbb{R}^-\right\}, \text{ onde } \mathbf{1} = (1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^m$$

   a) Esboce os conjuntos anteriores (no caso Ω considere $m = 2$) e ainda $A \cap D$ e $A \times [0,1]$.

   b) Para cada um dos conjuntos acima determine o seu interior, exterior, fronteira, aderência, derivado e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado, compacto, conexo, ou convexo.

   c) Dê, quando possível, exemplos de sucessões nas condições seguintes, justificando cuidadosamente as respostas:
   (i) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em ∂D tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} \in A$.
   (ii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em $A \setminus D$ tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} \in D$.
   (iii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em G tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$.
   (iv) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em E, convergente para um ponto de D^c.
   (v) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em E, divergente, mas com todos os sublimites em D^c.
   (vi) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em E, divergente, sem subsucessões convergentes.
   (vii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em C, divergente, sem subsucessões convergentes.

2. Sejam $(\mathbf{u}_n)$ e $(\mathbf{v}_n)$ duas sucessões de termos em $\mathbb{R}^m$ e suponha que $(\mathbf{u}_n)$ converge para o vector nulo e que $(\mathbf{v}_n)$ é limitada. Prove que a sucessão real de termo geral $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}_n$ converge para 0.

3. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}^m$. Relembre-se que $A \cup B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in A \vee \mathbf{x} \in B\}$, $A \cap B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in A \wedge \mathbf{x} \in B\}$ e $A + B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} \in A \wedge \mathbf{b} \in B\}$. Tomando para C cada um deste conjuntos,

mostre que são verdadeiras, ou exiba um contra-exemplo se forem falsas, as seguintes proposições:
(i) Se A e B são limitados, então C é limitado.
(ii) Se A e B são compactos, então C é compacto.
(iii) Se A e B são conexos, então C é conexo.
(iv) Se A e B são convexos, então C é convexo.

4. Mostre que as bolas unitárias para as normas ℓ_1, euclideana e ℓ_∞ de $\mathbb{R}^m$ são conjuntos convexos.

5. Seja $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ um ponto de $\mathbb{R}^m$. Mostre que o semi-espaço $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} < 0\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.

6. Seja $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ um ponto de $\mathbb{R}^m$. Mostre que $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = 0\}$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensão $(m-1)$.

7. Escreva uma equação cartesiana do plano que contém os pontos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_1$ de $\mathbb{R}^3$. Esboce a sua intersecção com o primeiro octante de $\mathbb{R}^3$.

Soluções

1.b) $\text{int } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2<1\}$,
$\text{ext } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2>1\}$,
$\text{fr } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2=1\}$,
$\bar{A} = A' = A$.

A é não aberto, fechado, limitado, compacto, conexo, convexo.

$\text{int } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2>1 \wedge 4x^2+y^2<4\}$,
$\text{ext } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2<1 \vee 4x^2+y^2>4\}$,
$\text{fr } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2=1 \vee 4x^2+y^2=4\}$,
$\bar{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2\geq 1 \wedge 4x^2+y^2\leq 4\}$,
$B' = \bar{B}$.

B é não aberto, não fechado, limitado, não compacto, não conexo, não convexo.

$\text{int } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, xy<1\}$,
$\text{ext } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, xy>1\}$,
$\text{fr } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, xy=1\}$,
$C' = \bar{C} = C$.

C é não aberto, fechado, não limitado, não compacto, conexo, não convexo.

$\text{int } D = D$,
$\text{ext } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x<|y|\}$,
$\text{fr } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x=|y|\}$,
$\bar{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x\geq |y|\}$,
$D' = \bar{D}$.

D é aberto, não fechado, não limitado, não compacto, conexo, convexo.

$\text{int } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, 1<|x|+|y|<2\}$,
$\text{ext } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, |x|+|y|<1 \wedge |x|+|y|>2\}$,
$\text{fr } E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, |x|+|y|=1 \wedge |x|+|y|=2\}$,
$\bar{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, 1\leq |x|+|y|\leq 2\}$,
$E' = \bar{E}$.

B é não aberto, não fechado, limitado, não compacto, conexo, não convexo.

$\text{int } F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, \frac{\pi}{2}+2n\pi < x+y < \frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\}$,
$\text{ext } F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, -\frac{\pi}{2}+2n\pi < x+y < \frac{\pi}{2}+2n\pi\}$,
$\text{fr } F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, x+y = \frac{\pi}{2}+n\pi\}$,
$\bar{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\, \frac{\pi}{2}+2n\pi \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\}$,
$F' = \bar{F}$.

F é não aberto, fechado, não limitado, não compacto, não conexo, não convexo.

$$\text{int } G = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1}\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 :\, \frac{1}{(2n+1)\pi} < \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{2n\pi}\right\}\right)\bigcup\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 :\, \|\mathbf{x}\| > \frac{1}{\pi}\right\},$$

$$\text{ext } G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1}\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 :\, \frac{1}{2n\pi} < \|\mathbf{x}\| < \frac{1}{(2n-1)\pi}\right\},$$

$$\operatorname{fr} G = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\mathbf{x}\| = \frac{1}{n\pi} \right\} \right) \bigcup \{\mathbf{0}\},$$

$$\bar{G} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{(2n+1)\pi} \leq \|\mathbf{x}\| \leq \frac{1}{2n\pi} \right\} \right) \bigcup \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\mathbf{x}\| \geq \frac{1}{\pi} \right\} \bigcup \{\mathbf{0}\},$$

$G' = \bar{G}$.

G é não aberto, não fechado, limitado, não compacto, não conexo, não convexo.

$\operatorname{int} U = \emptyset$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ext} U \quad = \quad & \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\right\} \right) \\ & \bigcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = \frac{1}{n} \wedge \sqrt{x^2+z^2} > \frac{1}{n} \right\} \right), \end{aligned}$$

$\operatorname{fr} U = U \bigcup \{(0,0,0)\}$.
$U' = \bar{U} = \operatorname{fr} U$.

U é não aberto, não fechado, limitado, não compacto, não conexo, não convexo.

$\operatorname{int} \Omega = \Omega$,
$\operatorname{ext} \Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \ : \ \|\mathbf{x} - n\mathbf{1}\| > e^{-n} \right\}$,
$\operatorname{fr} \Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \ : \ \|\mathbf{x} - n\mathbf{1}\| = e^{-n} \right\}$,
$\bar{\Omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \ : \ \|\mathbf{x} - n\mathbf{1}\| \leq e^{-n} \right\}$.

Ω é aberto, não fechado, não limitado, não compacto, não conexo, não convexo.

c)(i) Possível. Um exemplo: $\mathbf{x}_n = (0,0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Impossível (note que $A \setminus D$ é fechado).
(iii) Possível. Um exemplo: $\mathbf{x}_n = (\frac{1}{n\pi}, 0)$.
(iv) Possível. Um exemplo: $\mathbf{x}_n = (0, \frac{3}{2})$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(v) Possível. Um exemplo: $\mathbf{x}_n = (-1)^n(0, \frac{3}{2})$.
(vi) Impossível (consequência do teorema de Bolzano-Weierstrass).
(vii) Possível. Um exemplo: $\mathbf{x}_n = (n, 0)$.

3.(i) Verdadeiro nos três casos.
(ii) Verdadeiro para $C = A \bigcup B$ e $C = A + B$. Falso para $C = A \bigcap B$. Um contraexemplo: $A = B_2(\mathbf{0})$ e $B = B_1(\mathbf{0})$.

(iii) Falso para $C = A \bigcup B$. Um contraexemplo: $A = B_1(\mathbf{0})$ e $B = B_1(3\mathbf{e}_1)$. Falso para $C = A \bigcap B$. Um contraexemplo em $\mathbb{R}^2$: A recta $y = x$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Verdadeiro para $C = A + B$.

(iv) Falso para $C = A \bigcup B$. Para um contraexemplo, vêr (iii). Verdadeiro para $C = A \bigcap B$ e $C = A + B$.

7. Uma possível equação cartesiana: $x + y + 4z = 1$.