Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

5^a Ficha de Exercícios

(Eng^a Biológica, Eng^a Electrotécnica, Eng^a Química, Gestão, Química)

Integração (continuação)

7. Calcule:

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\cos(2x)\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^1 e^{t+e^t}\,dt$; c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 u, du$;

   d) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{8\tan x}{1+\sin^2 x}\,dx$; e) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx$

   g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\arctan x\,dx$

8. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\int_{\pi/2}^{\arctan x} \sin(t^2)\,dt$.

9. Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$ mostre que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\int_0^{1/x} f(t)\,dt\right)^x = e^{f(0)}.$$

10. Prove que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, verificando a condição:

$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(x), \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}},$$

    então f é constante.

11. Relembre que uma função $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T>0$, sse $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T>0$, então

$$F(x)=\int_x^{x+T} f(t)\,dt$$

    é uma função constante em $\mathbb{R}$.

12. Mostre que, para qualquer $x>0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

    Interprete graficamente.
    (Sugestão: use uma substituição de variável adequada.)

13. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$; b) $g(x) = \displaystyle\int_2^{e^x} \frac{1}{\log t}\,dt$

14. Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que, se é nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Mostre, por meio de exemplos, que a conclusão precedente poderia ser falsa em qualquer das três hipóteses seguintes:

1º. Se em vez de supôr f contínua em $\mathbb{R}$, se supusesse apenas que f era integrável em intervalos limitados.

2º. Se, em lugar de supôr nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, se admitisse que era nulo o integral de f em qualquer intervalo de comprimento 1.

3º. Se, em vez de supôr que era nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, se admitisse que era nulo o integral em qualquer intervalo do tipo $[-a, a]$, com $a > 0$.

15. Determine a área de cada uma das seguintes regiões do plano

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1 \wedge x^2 - 1 \le y \le \arccos x\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le x + 2\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \log x \wedge x \le a\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \le 1\}$

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \wedge |x| + |y| \ge 1\}$

Para as três primeiras regiões acima determine o comprimento da linha que serve de fronteira à região em causa.

Soluções

7. a) $\frac{1}{4}$, b) $e^e - e$, c) $\frac{4}{3}$, d) $\log 49$, e) $\arctan \frac{3}{4}$, f) $\frac{1}{2}$, g) $\frac{1}{4}\log 2$.

8. $-\sin\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$.

10. Use o T. Fundamental do Cálculo.

11. Idem.

12. Sug.: Faça a substituição de variável $t \to s = -t$.

13. a) Domínio: $\mathbb{R}$. Intervalos de monotonia: em $]-\infty, 0]$ é estritamente decrescente, em $[0, +\infty[$ é estritamente crescente. Extremos locais: 0 é um mínimo local atingido em $x = 0$.

    b) Domínio: $]0, +\infty]$. Intervalos de monotonia: em $]0, +\infty]$ é estritamente crescente. Não tem extremos locais.

14. Um exemplo para cada caso:

    1º. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq 1, \\ 1 & \text{se} \quad x = 1, \end{cases}$

    2º. $f(x) = \sin(2\pi x)$,

    3º. $f(x) = x$ (O exemplo do ponto anterior também servia).

15. a) $\pi + \frac{4}{3}$, b) $\frac{9}{2}$, c) $a \log a - a + 1$, d) 2, e) 4, f) $\pi - 2$.