Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

4^a Ficha de Exercícios

(Eng.^{a} Biológica, Eng.^{a} Electrotécnica, Eng.^{a} Química, Gestão, Química)

Integração

1. Calcule

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx, \quad \text{b)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx, \quad \text{c)} \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x\,dx, \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}\,dx.$$

2. Determine as derivadas das funções seguintes:

$$\text{a)} \int_1^x \sin(t^2)\,dt, \quad \text{b)} \int_x^{2\pi} \cos(t^2)\,dt, \quad \text{c)} \int_x^{2x} e^{t^2}\,dt,$$
$$\text{d)} \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt, \quad \text{e)} \int_{x^2}^{x^4} \sin(\sqrt{t})\,dt.$$

3. Dado $A \in \mathbb{R}$, designe-se por $\chi_A(t)$ a função característica do conjunto A, isto é, $\chi_A(t) = 1$ se $t \in A$, e $\chi_A(t) = 0$ se $t \notin A$. Calcule e esboce o gráfico de

$$\varphi_A(x) = \int_0^x \chi_A(t)\,dt,$$

justificando a existência do integral, quando

- A é conjunto dos inteiros;
- $A = [0, +\infty[$;
- $A = [-2, -1] \cup [0, +\infty]$.

4. Sejam $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt\,,$$
$$\int_{-x}^x g(t)\,dt = 0.$$

a) Mostre que f é uma função par e g é uma função ímpar.
b) Dê um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e de uma função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, integráveis em todos os intervalos limitados de $\mathbb{R}$, que verificam as igualdades anteriores e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

5. Calcule as áreas dos seguintes conjuntos:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$;
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x,\ y \geq x^3,\ y \leq 4x\}$.

6. Calcule o comprimento de um arco de circunferência de raio r e ângulo α.

Soluções

1. a) $\log 2$, b) $-\log 2$, c) $\frac{1}{2}(\log 2 - 1)$ d) 0.

2. a) $\sin(x^2)$, b) $-\cos(x^2)$, c) $2e^{4x^2} - e^{x^2}$, d) $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$,

   e) $\sin(x^2) - \sin|x|$.

3. $\varphi_{\mathbb{Z}}(x) = 0$, $\varphi_{[0,+\infty[}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq 0, \\ x & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$

$$\varphi_{[-2,-1]\cup[0,+\infty[}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad x \leq -2, \\ x+1 & \text{se} \quad -2 < x < -1, \\ 0 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ x & \text{se} \quad x > 0, \end{cases}$$

A existência do integral justifica-se, em cada caso, pelo facto de em cada intervalo limitado o conjunto de pontos de descontinuidade ser finito.

4. a) Sug.: use o Teorema Fundamental do Cálculo.

   b) Um exemplo para ambos os casos: $f(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq 1, \\ 1 & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$

5. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{13}{4}$.

6. $r\alpha$.