

ANÁLISE MATEMÁTICA II

2ª Ficha de Exercícios

(Eng^a Biológica, Eng^a Electrotécnica, Eng^a Química, Gestão, Química)

Primitivação (continuação)

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)},$

b) $\frac{x^4}{x^4 - 1},$

c) $\frac{x^5}{x^2 - 1},$

d) $\frac{x}{x^2 + 2x + 3},$

e) $\frac{x}{(x + 1)(x + 2)^2},$

f) $\frac{x^3 + 2x^2 + 2x}{(x + 1)^2},$

g) $\frac{x^5}{(x^3 + 1)(x^3 + 3)},$

h) $\frac{x^3 + 4x^2 - 4x}{x^4 - 16},$

i) $\frac{1}{x(x^5 + 1)^2}.$

Em seguida, determine todas as primitivas de cada uma das funções anteriores (nos respectivos domínios).

3. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $e^x(e^x + x),$

b) $e^x \sin x,$

c) $x^3 e^{-x^2},$

d) $\arctan x,$

e) $\arcsin x,$

f) $x(1 + x^2) \arctan x,$

g) $\frac{x^5}{\sqrt{1 + x^3}},$

h) $\log\left(\frac{1}{x} + 1\right),$

i) $x^2 \log^2 x,$

j) $\log^2 x,$

k) $\frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x},$

l) $\cos 2x \log(\tan x),$

m) $3x\sqrt{1 - x^2} \arcsin x,$

n) $\frac{x \cos x}{\sin^2 x},$

o) $\sec^4 x$

4. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes, utilizando uma substituição apropriada:

a) $\frac{e^{4x}}{e^{2x} + 1},$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x^4})},$

c) $\frac{\sqrt{x-1}}{x},$

d) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}},$

e) $x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}},$

f) $\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}},$

g) $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x},$

h) $\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}},$

i) $\sqrt{1 - x^2},$

j) $\frac{\log x}{x(\log x - 1)^2},$

k) $\frac{1}{1 + \sin x + \cos x},$

l) $\frac{1}{1 + 3 \cos^2 x}$

5. Determine, usando a substituição indicada, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\sec x$, $t = \sin x$,

b) $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, $x = \sec t$,

c) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$, $x = \cosh t$,

d) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}$, $x = \cos t$,

e) $\frac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}}$, $t = \sqrt{1-e^x}$,

f) $\frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, $x = t^6 - 1$,

g) $\frac{\sin x}{1-\sin x}$, $\tan \frac{x}{2} = t$,

h) $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x = \sin^2 t$,

i) $\sqrt{1-2x-x^2}$, $x = t-1$, $t = \sqrt{2}\sin s$,

j) $\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x+1 = \tan t$,

k) $\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x+1 = \sinh t$,

l) $\frac{1}{1+3\cos^2 x}$

Soluções

2.

- a) $2 \log |x - 1| - \log |x| + \frac{1}{x}$, b) $x + \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x$,
- c) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log |x^2 - 1|$, d) $\frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 3) - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x + 1) \right]$,
- e) $\log \left| \frac{x+2}{x+1} \right| - \frac{2}{x+2}$, f) $\frac{x^2}{2} + \log |x + 1| + \frac{1}{x+1}$,
- g) $\frac{1}{21} (8 \log |x^3 + 8| - \log |x^3 + 1|)$, h) $\frac{1}{2} \log(x^2 + 4) + \arctan \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$,
- i) $\log |x| - \frac{1}{5} \log |x^5 + 1| + \frac{1}{5(x^5+1)}$.

Exemplo de solução da segunda parte de 2.:

$$\text{a) } \begin{cases} 2 \log(x - 1) - \log x + 1/x + K_1, & \text{se } x > 1; \\ 2 \log(1 - x) - \log x + 1/x + K_2, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 2 \log(1 - x) - \log(-x) + 1/x + K_3, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

em que K_1, K_2, K_3 são constantes reais arbitrárias.

3.

- a) $e^x(e^x + x - 1)e^{2x}/2$, b) $e^x(\sin x - \cos x)/2$,
- c) $e^{-x^2}(x^2 + 1)/2$, d) $x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$,
- e) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, f) $\frac{1}{4}(1 + x^2)^2 \arctan x - x/4 - x^3/12$,
- g) $\frac{2}{3}x^3\sqrt{1 + x^3} - \frac{4}{9}(1 + x^3)^{2/3}$, h) $x \log(1/x + 1) + \log |x + 1|$,
- i) $\frac{x^3}{3} \log^2 x - \frac{2}{9}x^2 \log x + \frac{2}{27}x^3$, j) $x \log^2 x - 2x \log x + 2x$,
- k) $-\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, l) $\frac{1}{2} \sin(2x) \log(\tan x) - x$,
- m) $-(1 - x^2)^{3/2} \arcsin x + x - x^3/3$, n) $-\frac{x}{\sin x} + \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$,
- o) $\frac{1}{3} \frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{2}{3} \tan x$.

4.

- a) $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1)$, b) $\frac{3}{2} \arctan \sqrt[3]{x^2}$, c) $2\sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1}$,
- d) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3 \log |1 + \sqrt[3]{x}| + 6 \arctan \sqrt[6]{x}$,

$$\begin{array}{ll}
\text{e) } \frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2) + \frac{1}{2} \log |x + \sqrt{x^2+1}|, & \text{f) } -2 \arctan \sqrt{1-x}, \\
\text{g) } \log |\cos x| + \log |\tan x + 1|, & \text{h) } \log (\sin x + \sqrt{1+\sin^2}), \\
\text{i) } \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x, & \text{j) } \log |\log -1| - \frac{1}{\log x-1}, \\
\text{k) } \log \left| 1 + \tan \frac{x}{2} \right|, & \text{l) } \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\tan x}{2} \right)
\end{array}$$

5.

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right|, & \text{b) } \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},, & \text{c) } \frac{x}{2} \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \log |x + \sqrt{x^2-1}|, \\
\text{d) } -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)^{3/2}, & \text{e) } -2 \arcsin \sqrt{1-e^x}, \\
\text{f) } \frac{6}{7}(x+1)^{7/6} - \frac{6}{5}(x+1)^{5/6} + 2(x+1)^{1/2} - 6(x+1)^{1/6} + 6 \arctan(x+1)^{1/6}, \\
\text{g) } -x + \tan x + \sec x, & \text{h) } 2 \arcsin \sqrt{x}, \\
\text{i) } \frac{1}{2}(1+x)\sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}}, & \text{j), k) } -\frac{1}{x+1} \sqrt{x^2+2x+2}, \\
\text{l) } \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\tan x}{2} \right).
\end{array}$$