Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

10^a Ficha de Exercícios

(Eng.[a] Biológica, Eng.[a] Química, Química)

Derivação da função composta. Continuação

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas de 2ª. ordem contínuas tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $g(u, v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$. Mostre que $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$.

13. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^3$, tal que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, tal que

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0. \tag{1}$$

Determine as derivadas parciais de φ em função das derivadas parciais de F.

(Sugestão: derive ambos os membros de (**??**) em ordem a x e a y).

14. Mostre que não existe nenhuma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas tal que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -\sin y, \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = e^x.$$

Fórmula de Taylor e Estudo de Funções

1.a) Seja f uma função três vezes diferenciável numa vizinhaça do ponto a e suponha que $f''(a) = 0$ e $f'''(a) \neq 0$. Prove que a é um ponto de inflexão de f.

b) Seja f uma função quatro vezes diferenciável numa vizinhaça do ponto a e suponha que $f''(a) = f'''(a) = 0$ e $f^{(iv)}(a) \neq 0$. Prove que f é convexa ou côncava no ponto a conforme $f^{(iv)}(a) > 0$ ou $f^{(iv)}(a) < 0$.

2. Prove que o gráfico de uma função f, cujo domínio contém um intervalo não majorado, tem uma assímptota à direita se existem e são finitos os limites

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ (que designaremos por m),

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$ (que designaremos por p).

A assímptota é a recta de equação $y = mx + p$.

3. Prove que, se uma função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

para um certo $n \in \mathbb{N}$, então $f(x)$ é um polinómio em x de grau menor do que n.

4. Prove que se $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e se $g'''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então g não pode ter mais de dois pontos de extremo local.

   Admitindo agora que g tem de facto extremos locais nos pontos α e β com $\alpha < \beta$, indique se $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são máximos ou mínimos da função. Justifique.

   Escreva a fórmula de Taylor para g em relação ao ponto β e com resto de Lagrange ordem e aproveite para mostrar que $g(x) > g(\beta)$ para $x > \beta$.

5. Esboce o gráfico das funções dadas, tendo em conta os seguintes aspectos: domínio, continuidade, diferenciabilidade, monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas:

   a) $x^3 e^{-x}$, b) $\arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, c) $\dfrac{x}{1+\log|x|}$, d) $\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0, \qquad \text{e} \qquad f'''(x)(x-a) > 0, \qquad \text{se } x \neq a.$$

   Mostre que f tem um mínimo local no ponto a.

7. Para os campos escalares definidos em $\mathbb{R}^2$ pelas expressões seguintes, determine e classifique os seus extremos, indicando se são, ou não, globais e absolutos.

   a) $f(x,y) = xye^{x-y}$,

   b) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$,

   c) $f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$,

   d) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

8. Determine a fórmula de MacLaurin de terceira ordem da função $g(x,y) = e^x \sin y$.

9. Determine a fórmula de MacLaurin de quarta ordem da função $\varphi(x,y) = \cos x \cos y$.

10. Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem da função $\psi(x,y) = y^x$ numa vizinhança do ponto $(2,1)$. Aproveite este resultado para calcular um valor aproximado de $(0,95)^{2,01}$.

11. Escreva a função polinomial $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z+4$ em potências de $x-1$, $y-1$ e $z-1$.

Série de Taylor

1. Determine os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin das seguintes funçoẽs, indicando a região onde são válidos.

   a) $\dfrac{1}{1+x^2}$, b) $\arctan x$, c) $\log(1+x)$, d) $\sin^2 x$, e) $\dfrac{1}{(1-x)(1+x^2)}$.

2. Determine os desenvolvimentos em série de Taylor das seguintes funçoẽs em torno do ponto 2, indicando a região onde são válidos.

   a) $\dfrac{1}{3+x}$, b) $\sqrt{x}$ c) x^3, d) e^x, e) $\log x$.

3. Sejam f e g duas funções uma vez difenciáveis tais que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ e

$$f'(x) = g(x), \qquad g'(x) = -f(x), \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}.$$

   1º Prove que

      a) f e g são indefinidamente diferenciáveis.

      b) Qualquer das funções f e g é desenvolvível em série de Mac-Laurin, série essa que representa a função considerada para o ponto $x \in \mathbb{R}$.

   2º Utilize o método dos coeficientes indeterminados para obter os desenvolvimentos de Mac-Laurin de f e g.

   3º Prove que $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1, \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

Soluções

12. Aplique 2 vezes a regra de derivação da função composta.

13. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}, \qquad \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}.$