Análise Matemática II

LEB, LEQ, LQ

6ª Ficha de problemas-teste

I. Seja g a função real definida por

$$g(x,y) = \frac{2y}{x(y-1)}$$

em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais o segundo membro da igualdade anterior designa um número real.

1) Indique o domínio de g e verifique que a função é diferenciável no seu domínio.
2) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a função dada por $f(t) = (\,t,\, e^{2t})$ determine, justificando, a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto (1,0).

II. Considere a função $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}\,,\, \log(2-x^2-y^2)) \quad , \quad (x,y) \in D.$$

1) Identifique a aplicação $\varphi'(1,0)$.
2) Sendo $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $\psi(x,y) = x\,\operatorname{arctg}(xy)$, calcule $\nabla\psi \circ \varphi(1,0)$.

III. Seja $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$g(x,y) = (x\,e^{y-x}\,,\, \log(x/y)) \quad , \quad (x,y) \in D.$$

e considere a função real dada por $h(u,v) = v\sqrt{u}$. Determine o domínio de $h \circ g$ e mostre que

$$\frac{\partial(h\circ g)}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial(h\circ g)}{\partial y}(1,1) = 0 \quad .$$

IV. 1) Sendo n um número natural, determine todas as funções (n+1)-vezes diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que $f^{(n+1)}(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

2) Diga, justificando, se a função g dada por

$$g(x) = sen x^3 - \frac{x^2}{4} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

possui um máximo ou um mínimo local no ponto zero.