



Análise Matemática II

LEB, LEQ, LQ

5ª Ficha de problemas-teste

I. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e considere as funções $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(x) = a \cdot x \quad , \quad \psi(x) = \|x\|^4.$$

Para quaisquer $x, v \in \mathbb{R}^n$ determine $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x)$ e $\frac{\partial \psi}{\partial v}(x)$.

II. Considere a função real definida em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ por

$$f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

- 1) Calcule as derivadas parciais de f em qualquer ponto $(x, y) \in D$.
- 2) Justifique que f é diferenciável no seu domínio e identifique a aplicação $f'(1, 1)$.
- 3) Determine o conjunto dos vectores $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $D_v f(1, 1) = 0$.

III. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$g(x, y) = (e^{-xy^2}, \operatorname{sen}(x + y))$$

- 1) Determine a matriz jacobiana de g em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 2) Justifique que g é diferenciável em todo o seu domínio e identifique a aplicação $g'(0, \pi)$.
- 3) Mostre que $D_v g(0, \pi) \neq (0, 0)$ para qualquer vector $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.