



Análise Matemática II  
LEB, LEQ, LQ  
4ª Ficha de problemas-teste

---

I. 1) Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  e considere a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x, y) = (x e^{y-x}, \log(x/y)) \quad , \quad (x, y) \in D.$$

Determine o domínio  $D$  e diga, justificando, se o conjunto  $D$  é

(i) compacto                      (ii) conexo.

2) Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Indique, justificando, o conjunto dos pontos de continuidade de  $g$ .

II. Considere a função real definida em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  por

$$\varphi(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1) Justifique que  $\varphi$  é uma função contínua.

2) Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2] \text{ e } y \in [-1, 1]\}$ . Justifique que  $\varphi(A)$  é um intervalo limitado e fechado.

3) Mostre que para qualquer  $(x, y) \in D$  se tem

$$|\varphi(x, y)| \leq 2 \|(x, y)\|$$

e aproveite o resultado para concluir que  $\varphi$  é prolongável por continuidade ao ponto  $(0, 0)$ .

III. Considere a função real definida em  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}$  por

$$\psi(x, y) = \frac{2x(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}.$$

1) Justifique que  $\psi$  é uma função contínua.

2) Considere o conjunto  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \text{ e } x \in [-1, 1]\}$ . Indique, justificando sumariamente, se  $\psi(\Omega)$  é um conjunto

(i) aberto    (ii) fechado    (iii) limitado    (iv) conexo.

3) Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \psi(x, y)$ .