Análise Matemática II

LEB, LEQ, LQ

3ª Ficha de problemas-teste

I. 1) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, considere a função φ definida por

$$\varphi(x) = \int_{2x}^{x+x^2} f(t)\,dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Justifique que φ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e mostre que $\varphi^{'}(1) - \varphi(1) = f(2)$.

2) Sejam $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e ψ a função definida por

$$\psi(x) = \int_0^x e^{x^2-y^2}\, g(y)\,dy \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

a) Verifique, justificando, que ψ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ cuja derivada é dada por

$$\psi^{'}(x) = 2x\,\psi(x) + g(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

b) Mostre que se g é uma função positiva então ψ é estritamente crescente (em $\mathbb{R}$).

II. 1) Calcule o comprimento do gráfico da restrição ao intervalo $[-1, 1]$ da função $\operatorname{ch} x$.

2) Calcule o comprimento da linha definida pela equação $y = e^x$ com $x \in [0, 1]$.

Sugestão: Pode ser-lhe útil fazer a substituição $x = \frac{1}{2}\log(t^2 - 1)$.

III. 1) Calcule a área da região compreendida entre a parábola de equação $y^2 = 4x$ e a recta $y = 2x - 4$.

2) Calcule a área da região compreendida entre as curvas definidas pelas equações $y = x^2$, $x = y^2$, $y = 4$ e $x = 0$.