Análise Matemática II

2º exame

7 de Julho de 2004

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4 val.) **I.** 1. Obtenha uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}, \quad g(x) = x^2 \log x, \quad h(x) = \sqrt{1+e^x}\ .$$

indicando os domínios correspondentes.

2. Calcule o integral

$$\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x+5}}\, dx \ .$$

(5 val.) **II.** 1. Determine uma função $f \in C(\mathbb{R})$ e uma constante $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int_c^x f(t)\, dt = \cos x - \frac{1}{2} \quad , \quad \forall_{x\in\mathbb{R}} \quad .$$

2. Calcule o comprimento da linha definida pela equação $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ com $x \in [0,1]$.

3. Seja g uma função real, definida e integrável em $[0,1]$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n\, g(x)\, dx = 0 \quad .$$

Sugestão: Use o facto de g ser uma função limitada.

(8 val.) **III.** 1. Considere a função vectorial

$$f(x,y) = (f_1(x,y),\, f_2(x,y)) = \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\, ,\, x\, e^{x/y} \right)$$

definida em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ para os quais a expressão designa um vector de $\mathbb{R}^2$.

a) Determine o domínio D de f. Indique int$D$, front$D$ e diga se D é aberto, compacto ou conexo.

b) Justifique que f é diferenciável em D e determine $f'(1,1)$.

c) Calcule $\frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1)$ com $v=(3,2)$.

d) Prove que f_1 é prolongável por continuidade ao conjunto $\mathbb{R}^2$.

e) Designando esse prolongamento por $\tilde{f}_1$, será $\tilde{f}_1$ diferenciável em $(0,0)$?

2. a) Determine todos os pontos de estacionaridade das duas funções coordenadas de f, considerando f_1 definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ e f_2 em D.

   b) Indique, para cada uma dessas funções, o conjunto formado por todos os pontos de extremo local e o conjunto dos seus pontos de sela.
   Sugestão: Não utilize a matriz hessiana, estudando em vez disso, para a primeira função, o sinal de $f_1(x,y)$ numa vizinhança dos pontos de estacionaridade.

(3 val.) **IV.** Considere a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, dada por

$$g(t)=\big(1+t^2\,,\,1+\operatorname{sen}2t\big)$$

1. Prove que o ponto $(1,1)$ pertence à fronteira do contradomínio de g.
2. Sendo f a função definida em III., justifique que $\varphi=f_\circ g$ é diferenciável em 0 e calcule $\varphi'(0)$.
3. Determine as séries de Taylor das duas funções coordenadas de g no ponto π.