Análise Matemática II

Resolução do 1º exame

23 de Junho de 2004

I. 1. $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4}\log(1+x^4)+C$, para $x\in\mathbb{R}$,

$\displaystyle\int g(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{(3+\cos x)^2}\,dx = \int \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{(3+\cos x)^2}\,dx = \frac{1}{3+\cos x}+C$, para $x\in\mathbb{R}$,

$\displaystyle\int h(x)\,dx = \int x^2e^{1-x}\,dx = -x^2e^{1-x}+2\int xe^{1-x}\,dx$

$\displaystyle= -x^2e^{1-x}+2\left(-xe^{1-x}+\int e^{1-x}\,dx\right) = -e^{1-x}(x^2+2x+2)+C$, para $x\in\mathbb{R}$.

2. Decomposição em fracções simples:

$$\frac{2x}{(x-1)(x^2+5)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}.$$

Cálculo dos coeficientes A, B, C:

$$2x = A(x^2+5)+(Bx+C)(x-1)\,.$$

Fazendo $x=1$, obtem-se $2=6A$, ou seja, $A=1/3$. Logo,

$$\begin{cases} A+B &= 0\\ 5A-C &= 0\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad B=-\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad C=\frac{5}{3}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int \varphi(x)\,dx &= \int \frac{2x}{(x-1)(x^2+5)}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{-x+5}{x^2+5}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x}{x^2+5}\,dx+\frac{\sqrt{5}}{3}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx\\ &= \frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log(x^2+5)+\frac{\sqrt{5}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C_o\,.\end{aligned}$$

Logo, para $x\in\,]-1,1]$,

$$\phi(x) = \frac{1}{3}\log|x-1|-\frac{1}{6}\log(x^2+5)+\frac{\sqrt{5}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C_o\,.$$

Como $\phi(0) = -\frac{1}{6}\log 5+C_o$, da condição $\phi(0)=0$ conclui-se que $C_o=\frac{1}{6}\log 5$.

II. 1. A curvas $y=x$ e $y=x^3/4$ intersectam-se nos pontos das respectivas curvas cujas abcissas satisfazem $x=x^3/4$, ou seja, $x=-2$, $x=0$ e $x=2$. A área pedida é dada por

$$A = \int_{-2}^{0}\left(\frac{x^3}{4}-x\right)dx+\int_0^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx = 2\int_0^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}\right]_0^2 = 2\,.$$

2. Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(-x) &= \int_0^{-x} f(t)\,dt \qquad \text{(pela definição de g)} \\ &= \int_0^{-x} (-f(-t))\;dt \qquad \text{(por } f \text{ ser ímpar)} \\ &= \int_0^{x} f(s)\,ds \qquad \text{(pela substitução de variável } s=-t\text{)} \\ &= g(x) \qquad \text{(novamente pela definição de g)}\,. \end{aligned}$$

Logo g é uma função par.
Por outro lado, para cada n inteiro,

$$\begin{aligned} g(2n) &= \int_0^{2n} f(t)\,dt \qquad \text{(pela definição de g)} \\ &= \int_0^{2n} f(t-2n)\,dt \qquad \text{(porque } f \text{ é periódica de período 2)} \\ &= \int_{-2n}^{0} f(s)\,ds \qquad \text{(pela substituição de variável } s=t-2n\text{)} \\ &= -g(-2n) \qquad \text{(novamente pela definição de g)}\,. \end{aligned}$$

Logo, usando a dedução anterior e o facto de g ser par, $g(2n) = -g(-2n) = -g(2n)$ e, portanto $g(2n) = 0$.

III. 1. a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, existe uma bola centrada nesse ponto onde f é dada pelo quociente entre a soma de produtos de funções polinomiais com senos das coordenadas e uma função polinomial que não se anula nessa bola. Como todas estas funções são contínuas e produtos, somas e quocientes (em pontos onde o denominador não se anula) de funções contínuas são contínuas, concluimos que f é contínua em (x,y).
Se $(x,y) = (0,0)$, uma vez que

$$\left|\frac{x^2\operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|\operatorname{sen} y| + y^2|\operatorname{sen} x|}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{x^2|y|+y^2|x|}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{2\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = 2\|(x,y)\|$$

concluimos que, dado $\delta > 0$ arbitrário, tomando $\varepsilon = \delta/2$, vem,

$$\|(x,y)-(0,0)\| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - 0| < 2\varepsilon = \delta$$

e, portanto, f é contínua em $(0,0)$.

b) Uma vez que,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0$$

resulta $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$

d) Como $\nabla f(0,0)\cdot(1,1) = (0,0)\cdot(1,1) = 0$, temos $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq \nabla f(0,0)\cdot v$, com $v = (1,1)$, o que prova que f não é diferenciável em $(0,0)$.

2. a) Seja $F(u) = \displaystyle\int_a^u \varphi(t)\,dt$, para cada $u \in \mathbb{R}$. Sendo $\varphi \in C(\mathbb{R})$, pelo Teorema Fundamental da Análise, F é diferenciável e $F'(u) = \varphi(u)$, $\forall_{u\in\mathbb{R}}$. Por outro lado, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) = F(xy) - F(x).$$

Para $y \in \mathbb{R}$ fixo, $x \mapsto g(x, y)$ é diferenciável, porque é a diferença entre a composta de F com a função polinomial xy e a função F. Então, pelo teorema da derivação da função composta e pelo Teorema Fundamental da Análise, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial (xy)}{\partial x} F'(xy) - F'(x) = y\varphi(xy) - \varphi(x) .$$

Para $x \in \mathbb{R}$ fixo, por razões análogas, a função $y \mapsto g(x, y)$ é diferenciável e usando os mesmos teoremas, deduzimos que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial (xy)}{\partial y} F'(xy) = x\varphi(xy) .$$

Como $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 1) = 1.\varphi(0) - \varphi(0) = 1 - 1 = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0.\varphi(0) = 0$, concluimos que $\nabla g(0, 1) = (0, 0)$ e, portanto $(0, 0)$ é um ponto de estacionaridade de g.

b) Como φ é diferenciável em $\mathbb{R}$, existem as derivadas parciais de segunda ordem de g e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = y^2\varphi'(xy) - \varphi'(x) , \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = x^2\varphi'(xy) ,$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \varphi(xy) + xy\varphi'(xy) ,$$

e, uma vez que $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, o que implica que $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$, pelo Teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}.$$

Assim,

$$H_{(0,1)}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Como $\det H_{(0,1)}(g) = -1 < 0$, concluimos que $(0, 1)$ é um ponto de sela de g.

IV. a) $\operatorname{ext} S = \mathbb{R}^2 \setminus S$, $\operatorname{front} S = S$, $\operatorname{int} S = \emptyset$.
S não é aberto (porque contem pontos da fronteira),
S é fechado (porque $\overline{S} = \operatorname{int} S \cup \operatorname{front} S = S$),
S é limitado (porque, por exemplo, $S \subset B_2(0, 0)$),
S é compacto (porque é limtado e fechado),
S é conexo.

b) Como f é contínua em S e S é um conjunto compacto, segue-se, pelo Teorema de Weierstrass, que f tem máximo e mínimo absolutos em S, ou seja, o conjunto $f(S)$ tem máximo e mínimo. Como g é sobrejectiva, $g(D) = S$ e, por conseguinte,

$$(f \circ g)(D) = f(g(D)) = f(S).$$

Logo, o conjunto $(f \circ g)(D)$ tem máximo e mínimo, o que é o mesmo que dizer que a função $f \circ g$ assume máximo e mínimo absolutos em D.

c) Designemos por $f : S \to \mathbb{R}$ a restrição de φ a S. Dado que, para cada $u \in S$, se tem $\|u\| = 1$, então

$$f(u) = \varphi(u) = a \cdot u + \operatorname{sh}(b \cdot u).$$

Logo, f é a soma das funções $u \mapsto a \cdot u$ e $u \mapsto \operatorname{sh}(b \cdot u)$. Como o produto interno com uma constante vectorial é uma função contínua e as funções hiperbólicas são contínuas, usando o teorema da continuidade da função composta deduzimos que são ambas contínuas em S e, portanto a sua soma também o é. Concluimos que f é contínua.

Por outro lado, como para cada $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in S$, podemos definir $g : \mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\} \to S$ dada por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Como, para cada $x \in S$, $g(x) = x$, concluimos que g é sobrejectiva.

Aplicando o resultado da alínea b) concluimos que $\varphi = f \circ g$ tem máximo e mínimo absolutos em $\mathbb{R}^n \setminus \{\overline{0}\}$