Análise Matemática II

1º exame

23 de Junho de 2004

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5 vals.) **I.** 1. Obtenha uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^4+1}, \quad g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{(3+\cos x)^2}, \quad h(x) = x^2\, e^{1-x} \ ,$$

indicando os domínios correspondentes.

2. Considere a função real

$$\varphi(x) = \frac{2x}{(x-1)(x^2+5)} \quad .$$

Determine a função ϕ, definida no intervalo $I =]-1,1[$, tal que

$$\phi'(x) = \varphi(x), \quad x \in I \quad e \quad \phi(0) = 0.$$

(4 vals.) **II.** 1. Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^3/4$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar, periódica de período 2 e integrável em qualquer intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$. Considere a função

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad , \quad x \in \mathbb{R} \, .$$

Mostre que g é uma função par e que $g(2n) = 0$ para qualquer número inteiro n.

(8 vals.) **III.** 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Justifique que f é uma função contínua em cada ponto de $\mathbb{R}^2$.
(Relembre o facto de $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$).

b) Calcule o gradiante de f no ponto $(0,0)$.

c) Para $v = (1,1)$, determine $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

d) Diga, justificando, se f é ou não diferenciável em $(0,0)$.

2. Seja $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \int_x^{xy} \varphi(t)\, dt$$

a) Mostre que $(0, 1)$ é um ponto de estacionaridade de g. Justifique os cálculos.

b) Calcule a matriz hessiana da função g no ponto $(0, 1)$.

c) Classifique o ponto de estacionaridade $(0, 1)$.

(3 vals.) **IV.** Sendo m um inteiro positivo qualquer, considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^m$:

$$S = \{\, x \in \mathbb{R}^m \;:\; \|x\| = 1 \,\}\ .$$

a) Identifique $\operatorname{int} S$, $\operatorname{ext} S$, $\operatorname{front} S$ e diga se S é aberto, fechado, compacto, conexo.

b) Seja $D \subset \mathbb{R}^n$, onde n é um inteiro positivo qualquer, e considere duas funções:

$$g : D \to S \quad \text{sobrejectiva}, \qquad f : S \to \mathbb{R} \quad \text{contínua}\,.$$

Prove que $f \circ g$ tem máximo e mínimo absolutos.

c) Mostre que, dados a, $b \in \mathbb{R}^n$, a função $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = a \cdot \frac{x}{\|x\|} + \operatorname{sh}\left(b \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)$$

tem máximo e mínimo absolutos.

Sugestão: Poderá ser-lhe útil considerar a restrição de φ a S.