ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Ficha suplementar sobre fórmulas/séries de taylor

Bibliografia: *Introdução à Análise Matemática* de Jaime Campos Ferreira, sec. IV.2.1

- Alguns factos relevantes para a resolução dos exercícios abaixo (não é um resumo completo da teoria dada!):

  Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se **analítica** num ponto a no interior do seu domínio D se admite um desenvolvimento em série de potências em torno do ponto a - **série de Taylor** - isto é, se existem constantes reais c_k, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ tais que para todo $x \in D$ numa vizinhança de a,

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k.$$

  O maior intervalo em que a igualdade anterior ocorre é o intervalo de validade do respectivo desenvolvimento em série. Se f é analítica em a, então sabemos calcular os coeficientes c_k à custa das derivadas de f:

  $$c_k = \frac{f^k(a)}{k!}\,,$$

  (reciprocamente se conhecemos o desenvolvimento em série de uma função analítica em torno de a, podemos calcular qualquer $f^{(k)}(a)$ pela expressão anterior). Se $a = 0$, o desenvolvimento em série respectivo designa-se por **série de MacLaurin**.

  Exige-se que os alunos conheçam (pelo menos) as séries de Mac-Laurin com os intervalos de validade seguintes:

  $$\tfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

  $$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \tfrac{x^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  A partir destes constroem-se muitos outros desenvolvimentos em séries de potências por mudanças de variável ou por derivação termo a termo. As regiões de validade destes novos desenvolvimentos são calculados à custa dos atrás referidos.

- ## Exercícios:

1. Calcule os desenvolvimentos em série de Taylor em torno do ponto 0 (séries de MacLaurin) das seguintes funções indicando o maior intervalo aberto em que são válidos:

   a) $\dfrac{1}{a+bx}\,, \quad (a \neq 0 \text{ e } b \neq 0)$ b) $\arctan x\,,$ c) $\log(1+x)\,,$

   d) $\dfrac{1}{1-2x+x^2}\,,$ e) $\dfrac{\arctan(x^{100})}{x}\,,$ f) $2x(1+x^{100})\,,$

g) $1+x+x^2\log(1+x)$, h) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$, i) $\log\left(2+18x^2\right)$,

j) $\dfrac{1-e^{x^2}}{x^2}$, k) e^{2+x^2} , l) $(x+x^2)e^{2+x^2}$, m) 3^x

(Observação: nos casos em que 0 não faz parte do domínio da expressão dada convenciona-se que a função em $x=0$ é o seu prolongamento por continuidade a esse ponto)

2. Para cada um dos casos anteriores use as respectivos séries para determinar a derivada de menor ordem, $f^{(k)}(0)$, que não se anula. Aproveite para, em cada caso, determinar se $x=0$ é um ponto de estacionaridade e, se o for, para verificar se f tem extremo relativo nesse ponto e, nesse caso, classificá-lo.

3. Calcule os seguintes desenvolvimentos em série de potências em torno do ponto a dado (ou seja em potências de $x-a$), indicando o maior intervalo aberto em que são válidos:

a) x^4 , $a=1$ b) $\dfrac{1}{x}$, $a=2$ c) e^x , $a\in\mathbb{R}$

d) $\log x$, $a\in\mathbb{R}^+$, e) $\arctan(x-a)$, $a\in\mathbb{R}$, f) $\dfrac{1}{1+3x}+e^{2x}$, $a=1$,

g) $(x-1)^{100}\log(2-x)$ $a=1$, h) $\arctan\dfrac{(x-1)^2}{4}$ $a=1$,

4. Questão análoga a 2. mas para os desenvolvimento de 3. no ponto $x=a$, em cada caso.