ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 9ª Ficha de problemas-teste

I.

a) Como $f(x,0) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1\,.$$

Como $f(0,y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$, resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0\,,$$

e como $f(1,y) = 1 + \dfrac{1-e^y}{1+y^2}$, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = \frac{-e^y(1+y^2) - 2y(1-e^y)}{(1+y^2)^2}.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -1.$$

b) Tomemos $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ e consideremos a semi-recta dada por $(x,y) = (\alpha t, \beta t)$, com $t \geq 0$. Então,

$$\lim_{t\to 0^+} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1-e^{\alpha\beta t^2}}{t^2(\alpha^2+\beta^2)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-2t\alpha\beta e^{\alpha\beta t^2}}{2t(\alpha^2+\beta^2)} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

onde a regra de Cauchy foi usada na penúltima passagem. Dado que este limite depende de (α,β), concluimos que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e, portanto, não f não é contínua em $(0,0)$.

Como f não é contínua em $(0,0)$ podemos desde já concluir que f não é diferenciável em $(0,0)$. Se $(x,y) \neq (0,0)$, em torno de (x,y) existe uma bola em que f coincide com a soma de x (função polinomial), com o quociente entre a composta de $u \mapsto 1-e^u$ com a polinomial $(x,y) \mapsto xy$, e a polinomial $(x,y) \mapsto x^2+y^2$. Como funções polinomiais são diferenciáveis, bem como a exponencial e por conseguinte $1+e^u$, e quocientes entre funções diferenciáveis são diferenciáveis nos pontos onde o denominador não se anula, concluimos que f é diferenciável em todo o ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) Como f é diferenciável no ponto $(1,0)$, sendo $M_{(1,0)}(f)$ a matriz jacobiana de f no ponto $(1,0)$, podemos escrever, de acordo com a alínea anterior,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = M_{(1,0)}(f) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 - v_2 \,.$$

II.

a) Como $g(x,0) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e $g(0,y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0\,.$$

b) Para calular $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ sem sabermos se g é diferenciável no ponto $(0,0)$, temos que usar a definição de derivada segundo o vector v. Para isso defina-se

$$\varphi(t) = g((0,0) + t(1,1)) = g(t,t) = \frac{t^2 \sin t}{t^2 + t^2} = \frac{\sin t}{2}, \text{ se } t \neq 0,$$

e $\varphi(0) = 0$. Logo, para todo o $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \frac{\sin t}{2}$. Assim, por definição,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = \varphi'(0) = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Se g fosse diferenciável em $(0,0)$ ter-se-ia, para todo $v \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = M_{(0,0)}(g) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)v_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)v_2.$$

Escolhendo $v = (1,1)$ e usando os resultados obtidos atrás ter-se-ia $\frac{1}{2} = 0$, o que, sendo absurdo, prova que g não é diferenciável em $(0,0)$.

c) A função $\varphi(x,y)$ é um polinómio de primeiro grau que constitui uma aproximação de $g(x,y)$, em torno de $(1,0)$ com resto dado por $r(x,y) = g(x,y) - \varphi(x,y)$. De acordo com o enunciado,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y) - (1,0)\|} = 0$$

o que mostra que φ é a aproximação dada pela expressão que define a derivada de g em $(1,0)$ (polinómio de Taylor de primeira ordem), ou seja,

$$\varphi(x,y) = g(1,0) + M_{(1,0)}(g) \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)y$$

Calculando as derivadas parciais pela forma sugerida na alínea a), obtem-se facilmente $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 1$, dando

$$\varphi(x,y) = y,$$

ou seja $a = b = 0$ e $c = 1$.

III.

Observação: O vector gradiente de h num ponto (a,b) define-se como o vector $\left(\frac{\partial h}{\partial x}(a,b), \frac{\partial h}{\partial y}(a,b)\right)$ o qual designamos por $\nabla h(a,b)$. Assim, se designarmos por $M_{(a,b)}(h)$ a matriz jacobiana de h em (a,b), e $v=(v_1,v_2)$ um vector arbitrário, tem-se

$$h'(a,b)(v) = M_{(a,b)}(h)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \nabla h(a,b)\cdot v = \frac{\partial h}{\partial x}(a,b)v_1 + \frac{\partial h}{\partial y}(a,b)v_2.$$

a) Como $h(1,y)=y$, para todo o $y\in\mathbb{R}$ e $h(x,0)=0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, concluimos que

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,0)=0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(1,0)=1.$$

Ou seja, $\nabla h(1,0)=(0,1)$.

b) A função h é diferenciável no ponto $(1,0)$ sse o resto

$$r(x,y)=h(x,y)-h(1,0)-\nabla h(1,0)\cdot(x-1,y-0),$$

satisfaz

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x-1,y)\|}=0. \tag{1}$$

Assim, neste caso, dado que $h(1,0)=0$ e $\nabla h(1,0)=(0,1)$, tem-se

$$r(x,y)=h(x,y)-y=\frac{(x-1)^2y^2}{(x^2-1)^2+y^2}$$

Logo, como $(x^2-1)^2\geq 0$, tem-se $|r(x,y)|\leq \frac{(x-1)^2y^2}{y^2}=(x-1)^2$ e portanto,

$$\frac{|r(x,y)|}{\|(x-1,y)\|}\leq \frac{(x-1)^2}{\|(x-1,y)\|}\leq \frac{\|(x-1,y)\|^2}{\|(x-1,y)\|}=\|(x-1,y)\|.$$

mostrando que, tomando uma sucessão arbitrária (x_n,y_n) em $\mathbb{R}^2\setminus(1,0)$ tal que $(x_n,y_n)\to(1,0)$ se tem $\frac{r(x_n,y_n)}{\|(x_n-1,y_n)\|}\to 0$ provando o limite (1). A diferenciabilidade em $(1,0)$ fica provada.

c) Como h é diferenciável em $(1,0)$,

$$\frac{\partial h}{\partial v}(1,0)=\nabla h(1,0)\cdot v=(0,1)\cdot(v_1,v_2)=v_2\,.$$