ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da $8^{\underline{a}}$ Ficha de problemas-teste

I.

a) A função f é prolongável por continuidade a um ponto (a,b) sse as funções coordenadas g e h o são simultaneamente. Por outro lado, se $(a,b) \in \operatorname{front} D$ mas $(a,b) \notin D$, quer g, quer h, são prolongáveis por continuidade a (a,b) sse existem os respectivos limites quando $(x,y) \to (a,b)$.

Vejamos a função g. As funções polinomiais em $\mathbb{R}^n$ são contínuas em $\mathbb{R}^n$ e a função $u \mapsto \cos u$ é contínua em $\mathbb{R}$. Pelo teorema da continuidade da função composta, concluimos que a função $(x,y) \mapsto 1-\cos(y-x^2)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$. Logo, a função $(x,y) \mapsto \frac{1-\cos(y-x^2)}{y-x^2}$ é contínua em cada ponto (x,y) tal que $y \neq x^2$. Tomemos um ponto desta parábola, digamos (a,a^2). Pelo teorema do limite da função composta e usando a regra de Cauchy, obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(a,a^2)} \frac{1-\cos(y-x^2)}{y-x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u} = \lim_{u\to 0} \sin u = 0.$$

Logo, a função $(x,y) \mapsto \frac{1-\cos(y-x^2)}{y-x^2}$ admite um prolongamento por continuidade a todo o $\mathbb{R}^2$. Dado que no seu domínio, D, $g(x,y)$ coincide com aquela função, conclui-se que g é prolongável por continuidade a todo o $\mathbb{R}^2$.

Vejamos a função h. Sendo $u \mapsto \log u$ contínua em $\mathbb{R}^+$, pelos motivos acima apontados a função $(x,y) \mapsto \frac{1}{\log(1+x^2y^2)}$ é contínua em qualquer ponto (x,y) tal que $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ ((x,y) no complementar da união dos eixos coordenados). Por outro lado, se $a=0$ ou $b=0$, tomando uma sucessão em D, $(x_n,y_n) \to (a,b)$, tem-se $|h(x_n,y_n)| \to \infty$, o que mostra que h não pode ser prolongado por continuidade aos eixos coordenados. Logo o conjunto de pontos de front D a que f pode ser prolongada por continuidade é $\{(x,y) \neq (0,0) \ : \ y = x^2\}$, ou seja, front D excepto os eixos coordenados.

b) $X = \overline{B}_1(-2,-2)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ compacto e conexo. Como, por outro lado, $X \subset D$, e g é contínua em D, concluimos que $g(X)$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ compacto e conexo (teorema de Weierstrass em $\mathbb{R}^n$). Como em $\mathbb{R}$, os conjuntos compactos e conexos são precisamente os intervalos compactos, a justificação fica completa.

II.

a) Por razões idênticas às da alínea anterior, a função $(x,y,z) \mapsto \arctan e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$ é contínua em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Por outro lado, pelo teorema do limite da função composta,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \arctan e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{u\to 0} \arctan e^{\frac{1}{u}} = \frac{\pi}{2}\,.$$

e, por isso, é prolongável por continuidade a $(0,0,0)$. Logo, como φ, no seu domínio D, coincide com aquela função concluimos que φ admite um prolongamento por continuidade em $\mathbb{R}^3$.

Novamente invocando a continuidade das funções polinomiais, da função seno, da composta de funções contínuas e do quociente de funções contínuas, deduzimos que $(x,y,z) \mapsto \frac{\sin xyz}{xyz}$ é contínua em D. Como, pelo teorema do limite da função composta, para (a,b,c) tal que $abc = 0$ (planos coordenados),

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} \frac{\sin xyz}{xyz} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1,$$

concluimos que ψ admite um prolongamento por continuidade em $\mathbb{R}^3$.

Sendo φ e ψ as funções coordenadas de f concluimos que f admite um prologamento por continuidade a $\mathbb{R}^3$.

b) Em D, $x^2+y^2+z^2 > 0$. Logo, $e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} > 1$ e, portanto, $\arctan e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, ou seja,

$$\varphi(D) \subset \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[. \tag{1}$$

Para provarmos que, de facto, a igualdade ocorre podemos, por exemplo, considerar a semi-recta S dada por $(x,y,z) = (t,t,t)$, $t > 0$. Trata-se de um subconjunto conexo de D, e como φ é contínua, $\varphi(S)$ é um intervalo. Como $\lim_{t\to 0}\varphi(t,t,t) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,t,t) = \frac{\pi}{4}$, conclui-se que $\varphi(S) = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Logo,

$$\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\subset \varphi(D), \tag{2}$$

Combinando (1) e (2), concluimos que $\varphi(D) = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

III.

a) Designemos $r \equiv \|(x,y,z)\|^2 = x^2+y^2+z^2$. Numa bola em torno de cada ponto (x,y,z) tal que $r \neq 1$, F coincide com uma função polinomial (caso $r < 1$), ou com a composta da exponencial com o inverso de uma função polinomial que não se anula naquela bola (caso $r > 1$). Logo, F é contínua em (x,y,z) se $r \neq 1$.

Se (a,b,c) é tal que $a^2+b^2+c^2 = 1$, tomando uma sucessão (x_n,y_n,z_n) tal que $r_n \equiv x_n^2+y_n^2+z_n^2 > 1$, para todo o n, e tal que $(x_n,y_n,z_n) \to (a,b,c)$ tem-se $r_n \to 1$, por continuidade da função polinomial $x^2+y^2+z^2$, e, portanto, $F(x_n,y_n,z_n) \to +\infty$. Logo F não é contínua nos pontos (x,y,z) tais que $r = 1$.

b) A restrição de F ao conjunto conexo $B = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ é contínua dado que, em B, coincide com uma função polinomial. Como $(0,0,0)$ e $(0,1,0)$ pertencem a B, $F(0,0,0) = 0$ e $F(0,1,0) = 1$, pelo teorema do valor intermédio conclui-se que $[0,1] \subset F(B) \subset F(\mathbb{R}^3)$.