ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 7ª Ficha de problemas-teste

I.

a) Para cada vector $v = (\alpha, \beta) \neq (0,0)$ tomemos a semi-recta dada por $(x,y) = (0,0) + t(\alpha,\beta) = (\alpha t, \beta t)$, com $t > 0$, e o respectivo limite relativo:

$$\lim_{t \to 0^+} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t\alpha^2\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2} = 0\,.$$

b) O facto de existirem os limites relativos a todas as semirectas com origem em $(0,0)$ e coincidirem entre si nada prova quanto à existência ou não existência do limite quando $(x,y) \to (0,0)$. O que daí podemos extrair é que se o limite existir, ele é 0. Para concluir da sua existência apliquemos a definição de limite usando o facto que $(x^2+y^2)^2 = \|(x,y)\|^4$ e as majorações $|x| \leq \|(x,y)\|$ e $|y| \leq \|(x,y)\|$:

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \frac{\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4} = \|(x,y) - (0,0)\|\,.$$

Assim, dado $\delta > 0$ arbitrário, tomando $\varepsilon = \delta$, tem-se: $\|(x,y)-(0,0)\| < \varepsilon \Rightarrow |f(0,0) - 0| < \delta$, ou seja:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

(De forma equivalente também poderíamos justificar este limite dizendo que, de acordo com a majoração anterior, se (x_n, y_n) for uma sucessão em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, tal que $(x_n,y_n) \to (0,0)$, então $f(x_n,y_n) \to 0$.)

II.

a) A semi-recta com origem em $(1,0)$ e na direcção do vector $v = (\alpha,\beta) \neq (0,0)$ é dada por $(x,y) = (1,0)+t(\alpha,\beta) = (1+\alpha t, \beta t)$ com $t > 0$. O respectivo limite relativo é

$$\lim_{t\to 0^+} g(1+\alpha t, \beta t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^4\alpha^2\beta^2}{t^4(\alpha^2+\beta^2)^2} = \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,.$$

b) O limite relativo a cada semirecta, de acordo com alínea anterior depende do vector $v = (\alpha, \beta)$ escolhido. Por exemplo, se $v = (1, 0)$ o limite direccional respectivo é 0 e se $v = (1, 1)$ esse limite é $\frac{1}{4}$. Logo, podemos concluir que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$.

III.

a) O limite relativo à semi-recta $(x, y) = (0, 0) + t(\alpha, \beta) = (\alpha t, \beta t)$, $t > 0$, com $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ é dado por

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t\alpha \sin(t^2\beta^2)}{t^2\alpha^2 + t^4\beta^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\alpha \sin(t^2\beta^2)}{t(\alpha^2 + t^2\beta^4)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t\alpha\beta^2 \cos(t^2\beta^2)}{\alpha^2 + 3t^2\beta^4} = 0\,.$$

onde a regra de Cauchy foi usada na penúltima passagem para levantar a indeterminação que se obtem no caso $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 0$ o resultado é trivial.

b) O limite relativo ao conjunto A é dado por

$$\lim_{y\to 0} \varphi(y^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \sin(y^2)}{y^4 + y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y^2)}{2y^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Se existisse $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x, y)$ este teria que ser igual ao limite relativo a qualquer conjunto X, tal que $(0, 0) \in \overline{X}$. Ora as semi-rectas da alínea a) e o conjunto A desta alínea são exemplos de tais conjuntos. Logo, os respectivos limites relativos teriam que ser iguais, o que não se verifica. Logo, não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x, y)$.