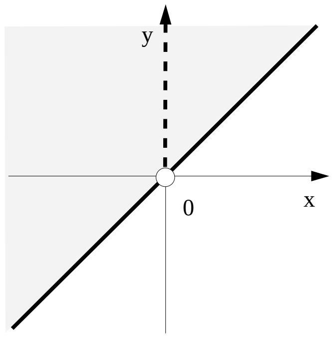
ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 6ª Ficha de problemas-teste

Observação: O tracejado nos esboços representam linhas que estão na fronteira do conjunto representado mas que não estão contidas nesse conjunto.

I.a) Esboço de $D = \{(x, y) \,:\, x \neq 0 \wedge y \geq x\}$:

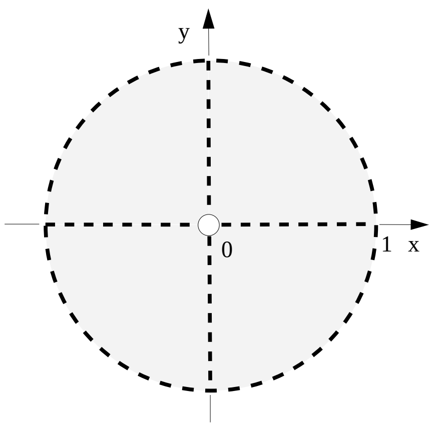


$$\begin{aligned} \operatorname{int} D &= \{(x, y) \,:\, x \neq 0 \wedge y > x\}, \\ \operatorname{ext} D &= \{(x, y) \,:\, y < x\}, \\ \operatorname{front} D &= \mathbb{R}^2 \setminus (\operatorname{int} D \cup \operatorname{ext} D) \\ &= \{(x, y) \,:\, x = 0 \wedge y > 0\} \cup \{(x, y) \,:\, y = x\}, \\ \overline{D} &= \operatorname{int} D \cup \operatorname{front} D = \{(x, y) \,:\, y \geq x\}. \end{aligned}$$

b) Como $\operatorname{int} D \neq D$, D não é aberto. Como $\overline{D} \neq D$, D não é fechado.

Escrevendo $D = A \cup B$, com $A = D \cap \{(x, y) \,:\, x < 0\}$ e $B = D \cap \{(x, y) \,:\, x > 0\}$, como $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ (ou seja, D é a união de dois **conjuntos separados**), segue-se que D não é conexo.

II.a) Esboço de $D = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 < 1 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$:

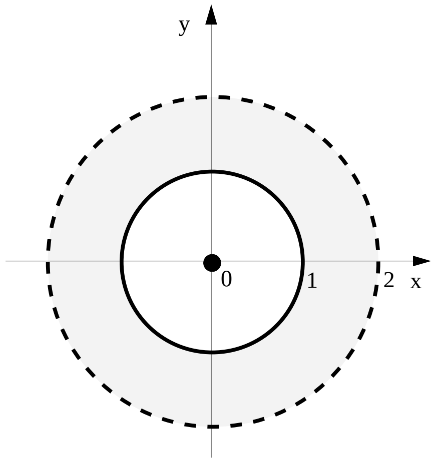


$$
\begin{aligned}
\operatorname{int} D &= D\,,\\
\operatorname{ext} D &= \{(x,y)\,:\,x^2+y^2>1\}\,,\\
\operatorname{front} D &= \{(x,y)\,:\,x^2+y^2=1\}\cup\{(0,y)\,:\,|y|\le 1\}\cup\{(x,0)\,:\,|x|\le 1\},\\
\overline{D} &= \operatorname{int} D\cup\operatorname{front} D=\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le 1\}\,.
\end{aligned}
$$

b) Como $\operatorname{int} D = D$, D é aberto. Como $\overline{D} \neq D$, D não é fechado.

O mesmo argumento usado em I. serve para justificar que, também neste caso, D não é conexo.

IIIa) Esboço de $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le \|x\| < 2\} \cup \{(0,0)\}$:



$$
\begin{aligned}
\operatorname{int} D &= \{x\in\mathbb{R}^2\,:\,1<\|x\|<2\}\,,\\
\operatorname{ext} D &= \{x\in\mathbb{R}^2\,:\,0<\|x\|<1\}\cup\{x\in\mathbb{R}^2\,:\,\|x\|>2\}\,,\\
\operatorname{front} D &= \{x\in\mathbb{R}^2\,:\,\|x\|=1\}\cup\{x\in\mathbb{R}^2\,:\,\|x\|=2\}\cup\{(0,0)\},\\
\overline{D} &= \{x\in\mathbb{R}^2\,:\,1\le\|x\|\le 2\}\cup\{(0,0)\}.
\end{aligned}
$$

b) Como $\operatorname{int} D \neq D$, D não é aberto. Como $\overline{D} \neq D$, D não é fechado.

Como $D = A \cup B$ onde $A = \{(0,0)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le \|x\| < 2\}$ e uma vez que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, deduz-se que D não é conexo.