ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 5ª Ficha de problemas-teste

I.

Cálculo da intersecção da curva $y = \arctan x$ com a recta $y = -\frac{\pi}{4}$:

$$\arctan x = -\frac{\pi}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -1\,.$$

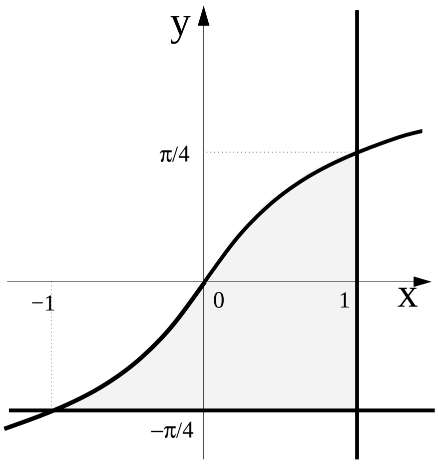
Logo, o ponto de intersecção é $(-1, -\frac{\pi}{4})$.

Cálculo do ponto de intersecção da curva $y = \arctan x$ com a recta $x = 1$:

$$y = \arctan 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{\pi}{4}\,.$$

O ponto de intersecção é o ponto $(1, \frac{\pi}{4})$.

Graficamente:



A área pedida é então:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\arctan x - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\, dx = \int_{-1}^{1} \arctan x\, dx + \frac{\pi}{4}(1-(-1)) = \frac{\pi}{2}\,.$$

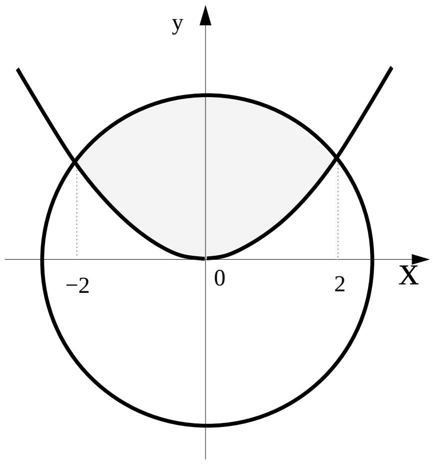
Aqui entrou-se em consideração que $x \mapsto \arctan x$ é uma função ímpar e que o intervalo $[-1, 1]$ é simétrico relativamente ao ponto zero, o que implica a nulidade do integral respectivo.

II.

Intersecção da parábola com a circunferência:

$$x^2 + y^2 = 8 \wedge y = \frac{x^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad y^2 + 2y - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2}\,.$$

Logo, $y = -1 + 3 = 2 \vee y = -1 - 3 = -4$. Uma vez que necessariamente $y > 0$, concluinos que $y = 2$, dando $x = \pm\sqrt{2.2} = \pm 2$ e, portanto, os pontos de interseção são $(-2, 2)$ e $(2, 2)$. Graficamente:



Calculemos a área A_1 do conjunto $\left\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 8 \wedge y \geq \frac{x^2}{2}\right\}$ (região sombreada na figura):

$$A_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\, dx - \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\, dx\,.$$

Fazendo a substituição de variável como habitualmente para estes casos, ou seja, $\sin t = \frac{x}{\sqrt{8}}$, obtemos:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\, dx = \sqrt{8} \int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2}\, dx = 8 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, dt$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos(2t))\, dt = 4 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4$$

Como,

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3},$$

resulta

$$A_1 = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}\,.$$

A área do outro subconjunto pedido pode ser determinada usando o facto da área do círculo de raio $\sqrt{8}$ ser 8π:

$$A_2 = 8\pi - A_1 = 6\pi - \frac{4}{3}\,.$$

III.

Intersecção das duas rectas:

$$y = \frac{1}{3} \wedge y = \frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}\,.$$

Intersecção da curva $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ com a recta $y = \frac{1}{3}$:

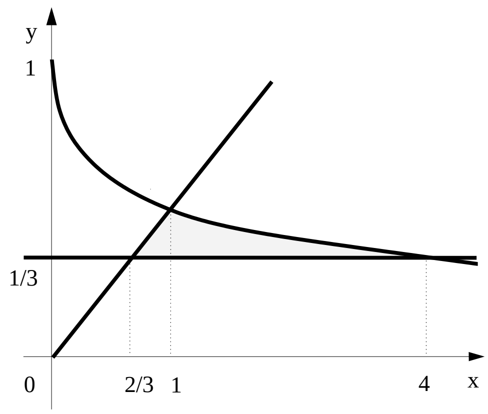
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4\,.$$

Intersecção da mesma curva com a recta $y = \frac{x}{2}$: como, na intersecção $x > 0$,

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{2}{x} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x} - 1 > 0 \wedge x = \left(\frac{2}{x} - 1\right)^2$$

$$x \in \,]0, 2[\; \wedge \; x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1\,,$$

dado que $x^3 - x^2 + 4x - 4 = x^2(x-1) + 4(x-1) = (x^2+4)(x-1)$, e, portanto, o único zero real é $x = 1$. Atendendo a que $x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ é estritamente decrescente, podemos esboçar graficamente a situação:



A área será dada então por

$$A = \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{x}{2}\,dx + \int_{1}^{4} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx - \int_{\frac{2}{3}}^{4} \frac{1}{3}\,dx.$$

Calculando,

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{2}{3}}^{1} = \frac{5}{36}\,.$$

Por outro lado, fazendo substituição de variável $x = t^2$, obtemos

$$\int_{1}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_{1}^{2} \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\,dt$$

$$= 2\left[t - \log|1+t|\right]_1^2 = 2\left(2 - \log 3 - 1 + \log 2\right) = 2 + \log\frac{4}{9}\,.$$

Por fim, como

$$\int_{\frac{2}{3}}^{4} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{2}{3}\right) = \frac{10}{9}\,.$$

concluimos que,

$$A = \frac{5}{36} + 2 + \log\frac{4}{9} - \frac{10}{9} = \frac{37}{36} + \log\frac{4}{9}\,.$$