ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 4ª Ficha de problemas-teste

I. A função $t \mapsto \frac{\log t}{t^2}$ é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R}^+$, é limitada em cada intervalo limitado e fechado contido em $\mathbb{R}^+$ e é, portanto, integrável em cada um desses intervalos. Como, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} > 0$, o intervalo de integração ($[e^{x^2}, 2]$ ou $[2, e^{x^2}]$, consoante $e^{x^2} < 2$ ou $e^{x^2} \geq 2$, respectivamente), está contido em $\mathbb{R}^+$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Assim, o integral está bem definido, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, sendo, portanto $\mathbb{R}$ o domínio de f.

Considere-se o integral indefinido $\varphi(u) = \int^u \frac{\log t}{t^2}\, dt$. Podemos escrever $f(x) = \varphi(e^{x^2})$ e, assim, pelo regra de derivação da função composta e pelo Teorema Fundamental da Análise, fazendo $u(x) = e^{x^2}$, tem-se,

$$f'(x) = \varphi'(u)u' = \frac{\log u}{u^2} 2xe^{x^2} = \frac{\log e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2} 2xe^{x^2} = \frac{2x^3}{e^{x^2}}\,.$$

Como $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \quad f'(0) = 0, \quad x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, segue-se que $f(x)$ é estritamente decrescente para $x \in \mathbb{R}^-$, é estritamente crescente para $x \in \mathbb{R}^+$ e tem mínimo absoluto em $x = 0$.

II. Trata-se de levantar uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, à qual podemos aplicar a regra de Cauchy. Para tal, é preciso calcular a derivada de $f(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2} \sin t\, dt$. Designando $\varphi(u) = \int_0^u e^{t^2} \sin t\, dt$, tem-se

$$f(x) = \varphi(x^2) - \varphi(x)$$

e, portanto, novamente recorrendo à regra de derivação da função composta e ao Teorema Fundamental da Análise:

$$f'(x) = \varphi'(x^2)(x^2)' - \varphi'(x) = e^{x^4} \sin x^2 \cdot 2x - e^{x^2} \sin x\,.$$

Então,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_x^{x^2} e^{t^2} \sin t\, dt = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \left(e^{x^4} \sin x^2 - \frac{e^{x^2} \sin x}{2x} \right) = -\frac{1}{2}\,.$$

III. Pela regra de derivação do produto e pelo Teorema Fundamental da Análise:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)e^{t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\left(x\int_0^x e^{t^2}\,dt - \int_0^x te^{t^2}\,dt\right)$$
$$= \int_0^x e^{t^2}\,dt + xe^{x^2} - xe^{x^2} = \int_0^x e^{t^2}\,dt.$$

Dado que $e^{t^2} > 0$, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$, tem-se, para $x > 0$,

$$g'(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt > 0,$$

para $x < 0$,

$$g'(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt = -\int_x^0 e^{t^2}\,dt < 0,$$

e $g'(0) = 0$. Deduzimos que $g(x)$ é estritamente decrescente para $x \in \mathbb{R}^-$, é estritamente crescente, para $x \in \mathbb{R}^+$, e tem mínimo absoluto em $x = 0$.