ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 3ª Ficha de problemas-teste

I. Usando a substituição de variável $2 + x = t^3$, donde $\frac{dx}{dt} = 3t^2$, resulta,

$$\int \frac{\sqrt[3]{2+x}}{(2+x)\left(1+\sqrt[3]{2+x}\right)}\,dx = \int \frac{t}{t^3\,(1+t)} \cdot \frac{dx}{dt}\,dt = \int \frac{3}{1+t}\,dt$$

$$= 3\log|1+t| = 3\log\left|1+\sqrt[3]{2+x}\right| .$$

Usando as identidades

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \qquad \text{e} \qquad \sin 2x = 2\cos x \sin x,$$

obtem-se

$$\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right) .$$

II. Começemos por explicitar a expressão integranda como uma expressão do tipo $\sqrt{1-y^2}$, $\sqrt{1+y^2}$ ou $\sqrt{y^2-1}$, de acordo com os coeficiemtes do polinómio quadrático do radicando:

$$I \equiv \int \sqrt{4-4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{8-(x+2)^2}\,dx = \sqrt{8}\int \sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{8}}\right)^2}\,dx .$$

Uma vez que a expressão obtida é do tipo $\sqrt{1-y^2}$, usamos a substituição de variável $\frac{x+2}{\sqrt{8}} = \sin t$, com $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, para a qual, $\frac{dx}{dt} = \sqrt{8}\cos t$:

$$I = \sqrt{8}\int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \frac{dx}{dt}\,dt = 8\int \cos^2 t\,dt = 4\int (1+\cos 2t)\,dt$$

$$= 4t + 2\sin 2t = 4\arcsin\left(\frac{x+2}{\sqrt{8}}\right) + 2\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x+2}{\sqrt{8}}\right)\right) .$$

Nota: se alternativamente usarmos $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}$ na penúltima expressão, obtem depois de uma simplificação,

$$I = 4\arcsin\left(\frac{x+2}{\sqrt{8}}\right) + \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{4-4x-4x^2} .$$

Para a segunda primitiva, transforma-se a integranda no produto de uma função de $\cos x$ por $\sin x$:

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x \, dx = \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$= \int \cos^2 x \sin x \, dx - \int \cos^4 x \sin x \, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} \, .$$

III. Faça-se a substituição de variável $e^x = t$, ou seja, $x = \log t$, donde $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$:

$$\int \frac{e^x - e^{5x}}{1 - e^{2x}} \, dx = \int \frac{t - t^5}{1 - t^2} \cdot \frac{dx}{dt} \, dt = \int \frac{1 - t^4}{1 - t^2} \, dt = \int \frac{(1 - t^2)(1 + t^2)}{1 - t^2} \, dt$$

$$= \int (1 + t^2) \, dt = t + \frac{t^3}{3} = e^x + \frac{e^{3x}}{3} \, .$$

Para a segunda primitiva, e seguindo a sugestão, uma vez que $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, obtemos

$$I \equiv \int \frac{1}{\cos^4 x} \, dx = \int (1 + \tan^2 x)^2 \, dx.$$

Fazendo a substituição $t = \tan x$, vem $x = \arctan t$ e, portanto, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$, resultando assim,

$$I = \int (1 + t^2)^2 \cdot \frac{dx}{dt} \, dt = \int (1 + t^2) \, dt = t + \frac{t^3}{3} = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} \, .$$