ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 2ª Ficha de problemas-teste

I. Dado que o polinómio numerador tem grau maior ou igual ao do denominador, é preciso, em primeiro lugar, fazer a respectiva divisão polinomial, ou seja, neste caso é preciso encontrar dois polinómios $ax + b$ e $cx + d$ tais que,

$$\begin{aligned} x^3 &= (ax+b)(x^2+4x+13)+(cx+d) \\ &= ax^3+(4a+b)x^2+(13a+4b+c)x+(13b+d)\,. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes respectivos de ambos os lados da igualdade,

$$1 = a, \qquad 0 = 4a+b, \qquad 0 = 13a+4b+c, \qquad 0 = 13b+d\,,$$

resulta imediatamente $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ e $d = 52$. Logo,

$$\frac{x^3}{x^2+4x+13} = x - 4 + \frac{3x+52}{x^2+4x+13}\,.$$

Por outro lado, $x^2 + 4x + 13$ não tem raizes reais. Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} \frac{3x+52}{x^2+4x+13} &= \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+4}{x^2+4x+13} + \frac{-4\cdot\frac{3}{2}+52}{x^2+4x+13} \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2+4x+13)'}{x^2+4x+13} + \frac{46}{x^2+4x+13}\,. \end{aligned}$$

Como,

$$\int \frac{(x^2+4x+13)'}{x^2+4x+13}\,dx = \log(x^2+4x+13)\,,$$

e como,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(\frac{x+2}{3})^2+1} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right)\,,$$

resulta,

$$\int \frac{x^3}{x^2+4x+13}\,dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{3}{2}\log(x^2+4x+13) + \frac{46}{3}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right)\,.$$

A primitiva pedida é da forma $F(x) = \varphi(x) + C$, onde $\varphi(x)$ é dada pelo segundo membro da última expressão acima e C é uma constante. Como $0 = F(0) = \varphi(0) + C = \frac{3}{2}\log 13 + \frac{46}{3}\arctan\frac{2}{3} + C$ deduz-se $C = -\frac{3}{2}\log 13 - \frac{46}{3}\arctan\frac{2}{3}$.

II. Procedendo como na questão I., obtemos

$$\frac{x^3}{x^2-4x+4} = x+4+\frac{12x-16}{x^2-4x+4}.$$

Neste caso, $x^2-4x+4=(x-2)^2$ e, portanto, tem apenas a raiz dupla $x=2$. Decompondo em fracções simples:

$$\frac{12x-16}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$$

resulta $12x-16 = A(x-2)+B$, donde $A=12$ e $B=8$. Por conseguinte,

$$\int \frac{12x-16}{(x-2)^2}\,dx = 12\log|x-2| - \frac{8}{x-2}\,,$$

e logo,

$$\int \frac{x^3}{x^2-4x+4}\,dx = \frac{x^2}{2}+4x+12\log|x-2|-\frac{8}{x-2}\,.$$

O domínio de f é $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Uma primitiva de f é qualquer função F de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, diferenciável, tal que $F'(x)=f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. A forma mais geral destas primitivas é

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x)+C_1\,, & \text{se } x<2\,,\\ \varphi(x)+C_2\,, & \text{se } x>2\,,\end{cases}$$

onde $\varphi(x)=\frac{x^2}{2}+4x+12\log|x-2|-\frac{8}{x-2}$ e C_1 e C_2 são duas constantes reais arbitrárias.

III. Como $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$, e o polinómio numerador tem grau inferior ao do polinómio denominador, pode-se decompor a função racional $f(x)$ da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}\,,$$

donde,

$$x^2+1 = A(x^2-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)\,.$$

Por substituição de x por cada uma das raizes do polinómio denominador, $0, -1, 1$, resulta respectivamente, $1 = -A$, $2 = 2B$, $2 = 2C$, e, portanto,

$$A = -1, \qquad B = 1, \qquad C = 1.$$

Logo,

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\log|x| + \log|x+1| + \log|x-1| = \log\left|\frac{x^2-1}{x}\right|\,.$$

Designemos esta primitiva por $\varphi(x)$. É óbvio que $\varphi(x) = \varphi(-x)$, qualquer que seja $x \in \setminus\{-1,0,1\}$, e portanto $\varphi(x)$ é uma função par. No entanto, nem todas as primitivas de $f(x)$ são funções pares. Um contraexemplo (entre infinitos possíveis) é a função $g(x)$ definida em $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se} \quad x \in \left]-\infty, 1\right[\setminus \{-1, 0\} \\ \varphi(x) + 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

De facto, se $x > 1$, tem-se $-x < -1$ e, portanto, $g(x) = \varphi(x) + 1$, enquanto que $g(-x) = \varphi(-x) = \varphi(x)$, donde $g(x) \neq g(-x)$.